

Kontrollskrivning 1 – 2014

Envariabelanalys del 2

Kurskod: TNIU23
Examination: KTR1
Max: 12 p
Bonus 2 p: Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p: Vid resultat 5–7 p
Lösningar: Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Inga
Skrivtid: 2014-02-07 kl. 08:00–10:00

1.

- a) Nämn en tillräcklig egenskap hos en funktion, för att den skall vara integrerbar med Riemann-integral.

Svar: Se sats 6.4

- b) Vad (enligt sats) gäller för värdet på ξ i följande exempel på mellanled, hämtade från lösningen av en uppgift:

$$\dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_n^{n+1} \arctan x \, dx = [\text{Enligt sats 6.5}] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\arctan \xi) ((n+1) - n) = \dots$$

Svar: Se sats 6.5

- c) Med generaliserade integraler utvidgas definitionen av integraler på olika sätt. Nämn två av dessa.

Svar: Se Definition 6.6 och 6.7

2. Bestäm en primitiv funktion till:

a) $f(x) = \ln x^2$

b) $f(x) = \cos^3 x$

c) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Svar a): Partiell integration med faktor 1 ger exempelvis $F(x) = x \ln x^2 - 2x$

Svar b): "Trigettan" och substitution av $\sin x$

ger exempelvis $F(x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}$

Svar c): Substitution av $\arcsin x$ ger exempelvis $F(x) = \frac{\arcsin^2 x}{2}$

3 · 1 p

3. Bestäm:

$$\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{x^2} e^{-t^2} dt$$

Svar: Exempelvis "Krzysztofs formel" ger $e^{-x^4} 2x - e^{-\sin^2 x} \cos x$

3 p

4. Beräkna värdet av den generaliserade integralen:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(x^2 + 1)} dx$$

Svar: Partialbråksuppdelning ger nya integralen

$$\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx. \text{ Generaliseringen hävs}$$

och standardprimitiver ger värdet $1 - \frac{\pi}{4}$

3 p