INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

# Kontrollskrivning 1 – 2016

## *Envariabelanalys del 2*

| | |
|---|---|
| Kurskod: | TNIU23 |
| Examination: | KTR1 |
| Max: | 12 p |
| Bonus 2 p: | Vid resultat 8–12 p |
| Bonus 1 p: | Vid resultat 5–7 p |
| Lösningar: | Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar |
| Hjälpmedel: | Skrivdon, linjal, kurvmall |
| Skrivtid: | 2016-02-11 kl 08:00-10:00 |
| Jour: | Peter Holgersson, 0705-19 99 92 |

---

**1.** Beräkna följande obestämda integraler

a. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}dx = \arcsin\frac{x}{3} + C$$

b. $\int \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx$

$$\int \frac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)}dx = |\text{Handpåläggning}|$$
$$= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$= \ln|x+1| - 2\ln|x+2| + \ln|x+3| + C$$

c. $\int 16\sin x\cos x\,(\sin^2 x - \cos^2 x)dx$

$$\int 16\sin x\cos x\,(\sin^2 x - \cos^2 x)dx$$
$$= -8\int 2\sin x\cos x\,(\cos^2 x - \sin^2 x)dx$$
$$= -8\int \sin 2x\cos 2x\,dx = -4\int 2\sin 2x\cos 2x\,dx$$
$$= -4\int \sin 4x\,dx = \cos 4x + C$$
$$(= -2\sin^2 2x + D)$$
$$(= -8\sin^2 x\cos^2 x + E)$$

**2.** Visa att

$$\frac{11}{18} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx \leq \frac{3}{2}$$

Under- och övertrappa med två delintervall ger

$$\frac{11}{18} = \underbrace{\frac{1}{1+1^3} + \frac{1}{1+2^3}}_{\text{undersumma}} \leq \underbrace{\int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dy}_{\substack{\text{integralen}\\ \text{mellanliggande}\\ \text{enligt sats}}} \leq \underbrace{\frac{1}{1+0^3} + \frac{1}{1+1^3}}_{\text{översumma}} = \frac{3}{2}$$

**3.** Välj en funktion som inte är kontinuerlig och visa att medelvärdessatsen för integraler inte är tillämpbar på den.

En slumpmässigt vald diskontinuerlig funktion:

$$f(x) = \begin{cases} 5 \text{ för } 0 \leq x \leq 2 \\ 7 \text{ för } 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

duger och har inom aktuellt intervall integralen

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 = 24$$

Tillämpning av medelvärdessatsen för integraler säger att det finns minst ett $\xi$ inom $0 \leq \xi \leq 4$ sådant att $f(\xi) \cdot 4 = 24$ men $f(x)$ antar aldrig värdet 6 och satsen är alltså inte tillämpbar på denna diskontinuerliga funktion.

Notera att exempelvis $f(x) = \tan x$ eller $f(x) = \frac{1}{x}$ ej kan användas i denna uppgift eftersom de (precis som alla elementära funktioner) är kontinuerliga på hela sin definitionsmängd. Att funktionen inte har sammanhängande definitionsmängd är en helt annan sak...

**4.** Beräkna

a. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{5x} t^2 dt$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{5x} t^2 dt = |\text{Krzysztofs formel}| = 125x^2 - \cos x\,(\sin x)^2$$

b. $\int_0^\infty \frac{1}{e^{-x}+e^x}dx$

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx = \int_0^\infty \frac{e^x}{1+(e^x)^2}dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{1+t^2}dt = \lim_{b\to\infty}[\arctan t]_1^b = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

c. $\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+2}\left(3+e^{-x^2}\right)dx$

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+2}\left(3+e^{-x^2}\right)dx = \left|\begin{matrix}\text{Medelvädessatsen}\\ \text{för integraler med}\\ a\le \xi \le a+2\end{matrix}\right| = \lim_{\xi\to\infty}\left(3+e^{-\xi^2}\right)2 = 6$$