INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning 1 – 2018

Envariabelanalys del 2

Kurskod:	TNIU23
Examination:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare
Skrivtid:	2018-02-02 kl 14:00-16:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

---

1. Beräkna:

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$$

Lösning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx = \left| \begin{array}{c} y = \sin x \\ \dfrac{dy}{dx} = \cos x \\ dy = \cos x \; dx \\ x = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{array} \right| = \int_0^1 y^3 dy = \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

b)

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx$$

Lösning:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b \to 0^-} \int_{-1}^{b} \frac{1}{x^2} \, dx + \lim_{b \to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{1}{x^2} \, dx = \cdots = \infty - 1 +$$

$$\lim_{b \to 0^-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{b} + \lim_{b \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{1} = (\infty - 1) + \big(-1 - (-\infty)\big) = \infty \text{ (divergent)}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+2}\left(3+\frac{1}{1+x^4}\right)dx$$

Lösning:

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+2}\left(3+\frac{1}{1+x^4}\right)dx=\left|\begin{array}{c}\text{Medelvärdes}-\\ \text{satsen för}\\ \text{integraler med}\\ n\le\xi\le n+2\end{array}\right|=\lim_{\xi\to\infty}\underbrace{\left(3+\frac{1}{1+\xi^4}\right)}_{=f(\xi)}\underbrace{(n+2-n)}_{=b-a}=6$$

3 p

2. Beräkna integralen med hjälp av en Riemann-summa med n st delintervall:

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

Ledning:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lösning med översumma:

$$\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(\frac{2i}{n}\right)^3\frac{2}{n}}_{=h\cdot b}=\left(\frac{8\cdot 1^3}{n^4}+\frac{8\cdot 2^3}{n^4}+\cdots+\frac{8\cdot n^3}{n^4}\right)=\frac{16}{n^4}(1^3+2^3+\cdots+n^3)$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{givet}\\ \text{samband}\end{array}\right|=\frac{16}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{16n^4+32n^3+16n^2}{4n^4}$$

$$=4+\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}\to 4 \text{ då } n\to\infty$$

3 p

3. Vissa integraler löses med hjälp av det annorlunda variabelbytet $y=\tan\frac{x}{2}$.

a) Tag fram tillhörande uttryck för variabelbyte av $\sin x$ och dx.

Svar: $\sin x=\frac{2y}{1+y^2}$ och $dx=\frac{2dy}{1+y^2}$

b) Beräkna integralen med hjälp av ovanstående variabelbyte.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

Lösning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1+y^2}{1+y^2}+\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2\,dy}{1+y^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{y^2+2y+1}\,dy = 2\int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2}\,dy = 2\int_0^1 (y+1)^{-2}\,dy$$

$$= 2\left[\frac{(y+1)^{-1}}{-1}\right]_0^1 = 2\left[\frac{-1}{y+1}\right]_0^1 = 2\cdot\frac{-1}{2} - 2\cdot(-1) = 1$$

3 p

4. Analysens huvudsats berättar att om funktionen $f(t)$ är kontinuerlig på hela det aktuella intervallet, x är en variabel och a är konstant så gäller att:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Bevisa att detta stämmer och komplettera beviset med en förklarande figur.

Svar: Se bevis från föreläsning 4 eller i läroboken

3 p