

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2014

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I-III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I-III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1-KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, passare och linjaler
Skrivtid: 2015-01-09, kl 08:00–13:00

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$|x + 1| - 2|x - 2| = 0$$

Svar: Studie av tre intervall ger två lösningar $x_1 = 1$ eller $x_2 = 5$

- b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8 \\ x + y - 3z = 2 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

Svar: Successiv elimination ger $x = 3$, $y = 2$ och $z = 1$

- c) Lös ekvationen

$$x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 24x = 0$$

Svar: Gissning av rötter och faktorisering ger $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ eller $x_3 = -3$ eller $x_4 = -4$

3 p

2. Lös olikheten

$$\frac{x + 6}{x - 2} \geq \frac{x + 6}{x + 2}$$

Svar: Lika nämnare, faktorisering och teckenstudium ger $x \in [-6, -2[\cup]2, \infty[$

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a) $\sin x (1 - 2\cos x) = 0$

Svar: $x = \pm \frac{\pi}{3} + n2\pi$ eller $x = n\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

b) $\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2} = 0$

Svar: $x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{3\pi}{2} + n2\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

c) $2 \lg 4x - \lg 16x = 2$

Svar: Tredje och andra logaritmlagen ger $x = 100$

3 p

4. Låt $y = f(x) = e - e^x$.

- a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

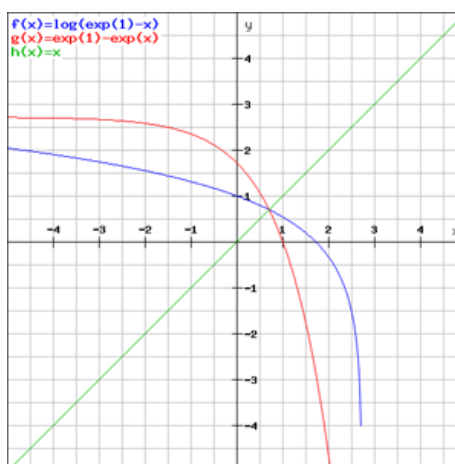
Svar: $D_f \in]-\infty, \infty[$ och $V_f \in]-\infty, e[$

- b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = \ln(e - x)$, $D_{f^{-1}} \in]-\infty, e[$ och $V_{f^{-1}} \in]-\infty, \infty[$

- c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar: Notera att korrekt skissade grafer tydligt skall begränsas av sina definitions- och värdemängder enligt ovan...



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Bestäm z^6 om $z = 1 + \sqrt{3}i$

Svar: Byte till polär form och de Moivres formel ger $z^6 = 64$

b) Lös ekvationen $z^2 + (8 + 4i)z - 24 + 16i = 0$

Svar: Kvadratkomplettering ger $z_{1,2} = -4 - 2i \pm 6$.

c) Lös ekvationen $z^4 = -64$ och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form).

Svar: Lösning på polär form och byte till $a + bi$ ger $z_{1,2} = 2 \pm 2i$ eller $z_{3,4} = -2 \pm 2i$

3 p

6. Lös ekvationen $|z - 3 + 2i| = 3|z - 3 - 6i|$

Svar: En cirkel med $r = 3$ och centrum i $z = 3 + 7i$ ty $(x - 3)^2 + (y - 7)^2 = 9$

3 p