

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT 2014

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I-III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I-III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1-KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Inga
Skrivtid: 2015-09-14, kl 08:00–13:00

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6 = 0$$

Svar: Gissade rötter och polynomdivision med tillhörande faktorer ger $x_1 = -1$, $x_2 = 1$,
 $x_3 = -2$ eller $x_4 = 3$

- b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y + z = -1 \\ x - y + 2z = 3 \\ -2x + 2y - z = -9 \end{cases}$$

Svar: Successiv elimination ger $x = 10$, $y = 5$ och $z = -1$

- c) Lös olikheten

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x - 3} \leq 0$$

Svar: Faktorisering och teckenstudium ger $x \in]-\infty, -5] \cup [-2, 3[$

3 p

2. Lös olikheten

$$3|2 - x| + |x + 2| < 20$$

Svar: Studie av tre intervall ger $x \in]-4, 6[$

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a) $\sin x (1 + 2\cos x) = 0$

Svar: $x = \pm \frac{2\pi}{3} + n2\pi$ eller $x = n\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

b) $\cos^2 x - 5 \cos x + 6 = 0$

Svar: Saknar reella rötter

c) $\lg(-5x) = 3 - \lg(-2x)$

Svar: $x = -10$

3 p

4. Låt $y = f(x) = \ln(1 - x)$.

a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

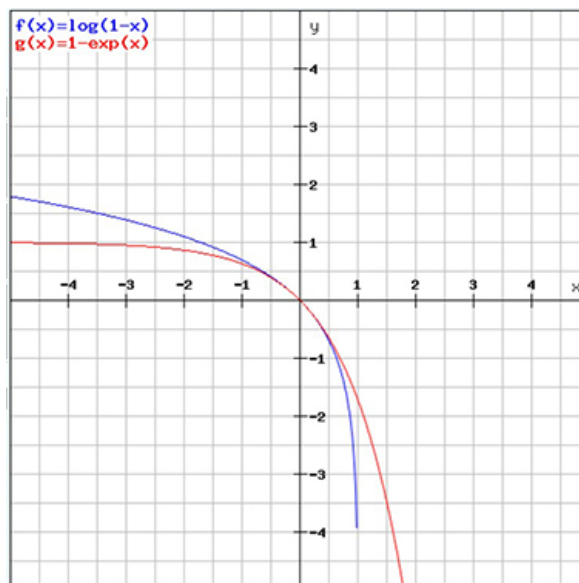
Svar: $D_f \in]-\infty, 1[$ och $V_f \in]-\infty, \infty[$

b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = 1 - e^x$ $D_{f^{-1}} \in]-\infty, \infty[$ och $V_{f^{-1}} \in]-\infty, 1[$

c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar: Notera att korrekt skissade grafer tydligt skall begränsas av sina definitions- och värdemängder enligt ovan...



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Bestäm z^8 om $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Svar: $z^8 = 256$

b) Lös ekvationen $|z - 4 - 3i| = 2$

Svar: Lösningen motsvarar en cirkel med radien $r = 2$ och centrum i punkten $(4, 3)$
och ekvationen $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

c) Lös ekvationen $2z^4 = -32$ och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form).

Svar: $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ eller $z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

3 p

6. Lös ekvationen $z^2 - (4 + 8i)z - 17 + 4i = 0$

Svar: Ersättning med $z = a + bi$ ger $\begin{cases} a^2 - b^2 = 5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = 13 \end{cases}$, detta genom studie av realdel,

imaginärdel och absolutbelopp hos höger- och vänsterled. Insättning av $a = \pm 3$ och $b = \pm 2$ ger därefter $z_1 = 5 + 6i$ eller $z_2 = -1 + 2i$

3 p