Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2013

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2014-01-15, kl. 08:00–13:00			

1.

a) Förenkla uttrycket $\tan\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$. (1 p)

Lösningstips: ”Trigettan” eller hjälptriangel ger $\sqrt{15}$

b) Visa att $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$ saknar invers. (1 p)

Lösningstips: Insättning av olika x-värden med samma belopp ger samma funktionsvärde – alltså är funktionen inte injektiv och saknar därmed invers.

c) Härled Eulers formel för $\cos x$ med hjälp av Eulers första formel:

$z = e^{ix} = \cos x + i\sin x$ (1 p)

Lösningstips: Addera z och $\bar{z}$ på polär form och lös sedan ut $\cos x$.

2.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$. (1 p)

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten.

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$ då

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x+\sin x}{x} & då\ x \neq 0 \\ A & då\ x = 0 \end{cases}$$ (2 p)

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ger $A = 3$.

3.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara deriverbar i en punkt $x = a$. (1 p)

Lösningstips: Funktionen skall vara definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet för differenskvoten (se definition 4.1) skall existera ändligt.

b) Härled derivatan till $f(x) = \sin x$ med hjälp av derivatans definition. (2 p)

Lösningstips: Härledning enligt derivatans definition – gärna med dubbelsidiga differenskvoten $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ som ger smidig förenkling med hjälp av additions- och subtraktionssats – ger $f'(x) = \cos x$.

4.

Låt $f(x) = \begin{cases} x^3 + x \text{ då } x > 1 \\ kx + m \text{ då } x \leq 1 \end{cases}$

a) Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig (I) och blir deriverbar (II) för alla x-värden. (2 p)

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 + x) = 2$. Därmed vet man att punkten $(1, 2)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(1, 2)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 + x - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x + 2) = 4$$

Därmed vet man dessutom att $k = 4$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 1$. Annars skulle punkten $(1, 2)$ bli en singulär punkt med olika höger- och vänsterderivata.

Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger dessutom $m = -2$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x \text{ då } x > 1 \\ 4x - 2 \text{ då } x \leq 1 \end{cases}$$

b) Bestäm inversens derivata $(f^{-1})'(10)$. (1 p)

Lösningstips: Resonemang med symmetri eller med sats 4.6 ger $(f^{-1})'(10) = \frac{1}{13}$

5.

Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter för funktionen $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x + 2$ då $x \in [-1,\ 27]$. (3 p)

Lösningstips: Lokala maximipunkter i ändpunkten $x = -1$ och i den stationära punkten $x = 8$ med $f'(x) = 0$ samt lokala minimipunkter i ändpunkten $x = 27$ och i den singulära punkten $x = 0$ där derivata saknas.

6.

Låt $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$

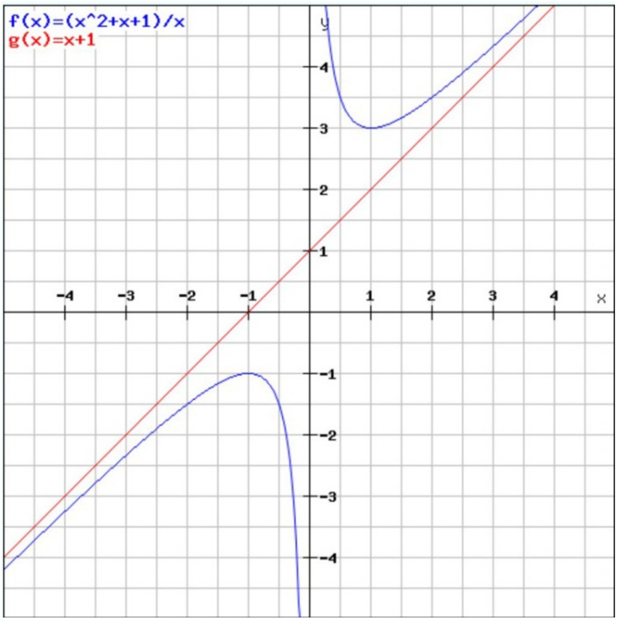
a) Bestäm samtliga stationära punkter (1 p)

Lösningstips: Lokal minimipunkt $x = 1$ samt lokala maximipunkt $x = -1$

b) Bestäm samtliga asymptoter (1 p)

Lösningstips: Lodrät asymptot $x = 0$ och sned asymptot $y = x + 1$ som fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa grafen (1 p)

Svar: 

7.

a) Härled sambandet för partiell integration ur sambandet för produktderivata. (1 p)

Lösningstips: Se Bevis av sats 5.4 i läroboken.

b) Bestäm integralen $\int e^{2x} \sin 4x \, dx$ (2 p)

Lösningstips: Partiell integration ger åter den ursprungliga integralen efter två varv. Denna löses då ut och man får då $F(x) = \frac{1}{10} e^{2x} \sin 4x - \frac{1}{5} e^{2x} \cos 4x + C$