Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2013

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2014-08-19, kl. 08:00–13:00			

---

1. Bestäm tangenten till kurvan $f(x) = x^3 - 3x^2$ i kurvans inflexionspunkt

Lösningstips:

Andraderivatan skiftar tecken då $x = 1$.

I denna punkt fås tangenten $y = -3x + 1$.

(3 p)

2.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$

Lösningstips:

Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$

b) Undersök om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i origo för

$$f(x) = \begin{cases} e^{\left(1 + x \sin\frac{1}{x}\right)} & \text{då } x \neq 0 \\ e & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips:

Gränsvärdet $\lim_{x \to 0} f(x) = e = f(0)$ ger kontinuitet enligt definition 3.5.

(3 p)

3.

a) Bestäm

$$\int \frac{6x}{1+x^2}\,dx$$

Lösningstips:

Notera att derivatan av nämnaren finns i täljaren (se regel 5.3 c) och ger

$$3\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 3\ln(1+x^2) + C$$

b) Bestäm

$$\int x^2 e^x dx$$

Lösningstips:

Två varv partiell integration med derivering av x^2 ger:

$$\int x^2 e^x dx = \cdots = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

c) Bestäm

$$\int \ln x^2\,dx$$

Lösningstips:

Logaritmlag 2.6 och partiell integration med derivering av $\ln x$ ger:

$$\int \ln x^2\,dx = \int 2\ln x\,dx = \cdots = 2x\ln x - 2x + C$$

(3 p)

4.

a) Undersök om funktionen $f(x) = x|x| - x$ är deriverbar i origo.

Lösningstips:

Högerderivatan och vänsterderivatan i origo tas fram med

hjälp av derivatans definition och båda har värdet -1.

Därmed är $f(x)$ deriverbar i origo enligt sats 4.1.

b) Låt $f(x) = \tan 2x$. Bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition

Ledning: $\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$

Lösningstips:

Derivatans definition (Def 4.1) ger för $f(x) = \tan 2x$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\tan\big(2(x+h)\big) - \tan 2x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\tan(2x+2h) - \tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\tan 2x + \tan 2h}{1 - \tan 2x \tan 2h} - \tan 2x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\tan 2x + \tan 2h - \tan 2x\,(1 - \tan 2x \tan 2h)}{h(1 - \tan 2x \tan 2h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2 \cdot \frac{\tan 2h}{\underbrace{2h}_{\substack{sgv\\ \to 1}}} \cdot \frac{1 + \tan^2 2x}{1 - \underbrace{\tan 2x \underbrace{\tan 2h}_{\to 0}}_{\to 0}} = 2(1 + \tan^2 2x)$$

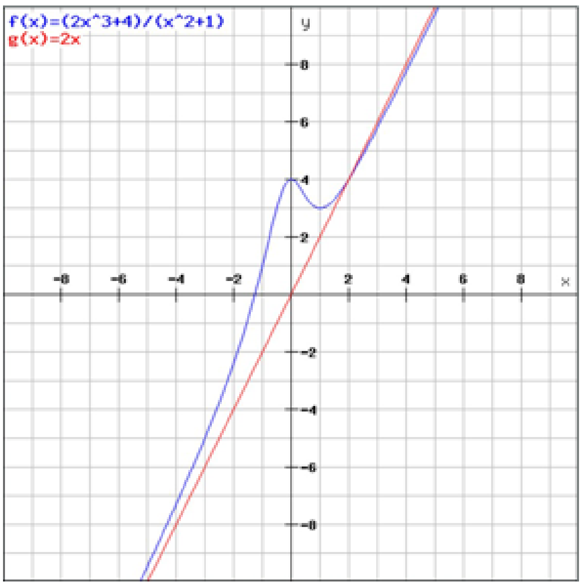
(3 p)

5.

Skissa grafen och eventuella asymptoter för $f(x) = \frac{2x^3+4}{x^2+1}$

Lösningstips:

Man erhåller endast en sned asymptot $y = 2x$ Den bestäms med hjälp av sambanden 4.14 och 4.15 i läroboken eller via polynomdivision. Teckenstudium av derivata som efter faktorisering skrivs enligt $f'(x) = \frac{2x(x-1)(x^2+x+4)}{(x^2+1)^2}$ ger lokalt maximum då $x = 0$ och lokalt minimum då $x = 1$.



(3 p)

6.

a) Formulera kedjeregeln, alltså satsen för derivata av sammansatt funktion

Lösningstips

Se sats 4.3 på sid 184 i läroboken.

Notera både formeln och förutsättningarna för att den skall gälla.

b) Bestäm $f'(x)$ med hjälp av kedjeregeln för

$$f(x) = \sqrt{x + e^{\tan x}}$$

Lösningstips

$$f(x) = \sqrt{x + e^{\tan x}} = (x + e^{\tan x})^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x + e^{\tan x})^{-\frac{1}{2}}\left(1 + e^{\tan x}(1 + \tan^2 x)\right)$$
$$= \frac{1 + e^{\tan x}(1 + \tan^2 x)}{2\sqrt{x + e^{\tan x}}}$$

c) Bestäm med hjälp av kedjeregeln

$$\int \sin(\sin x) \cos x \;\, dx$$

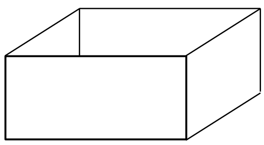
Lösningstips

Den inre funktionen är $\sin x$ med (inre) derivata $\cos x$ så att

$$\int \sin(\sin x) \cos x \;\, dx = \int \sin(y) \frac{dy}{dx} \, dx$$
$$= -\cos(y) + C = -\cos(\sin x) + C$$

7.

En låda utan lock har formen av ett rätblock med kvadratisk bottenyta. Den totala ytterarean (botten + fyra lika sidor) 1 m^2. Bestäm lådans maximala volym.

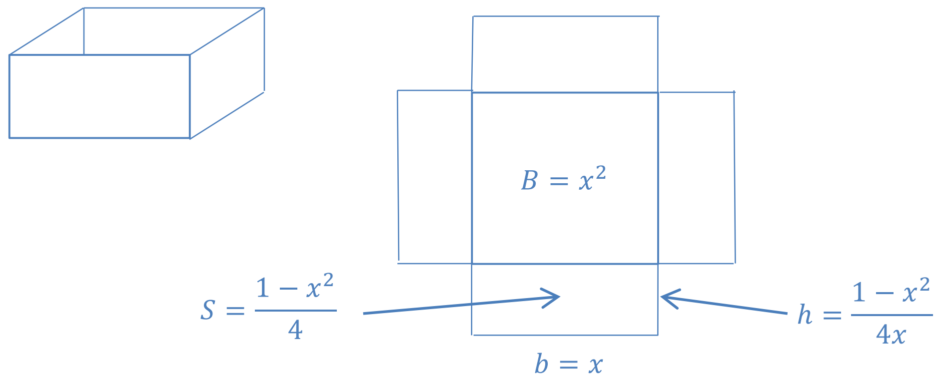


Lösningstips

Genom att välja baskanten $b = x$ får man basyta med arean $B = x^2$

Fyra lika sidoytor får därmed arean $S = \frac{1-x^2}{4}$

Höjden fås genom division enligt $h = \frac{\frac{1-x^2}{4}}{x} = \frac{1-x^2}{4x}$



Volymen blir därmed $V = Bh = \frac{x-x^3}{4}$ $för\ x \in [0, 1]$

Teckenstudium av derivatan ger lokalt maximum för $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Insättning ger den maximala volymen $V = \frac{1}{6\sqrt{3}}$ m^3 $\approx$ 96 liter