Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2014

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2015-04-08, kl. 08:00–13:00			

1.

a) Redogör för definitionen av *kontinuitet för funktionen $f(x)$ i en punkt $x = a$.*

Lösningstips:

Se Definition 3.5 i läroboken för inre punkt samt texten efteråt för isolerad punkt

b) Undersök om $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x = 2$ om

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x-10}{x-2} & \text{då } x \neq 2 \\ 7 & \text{då } x = 2 \end{cases}$$

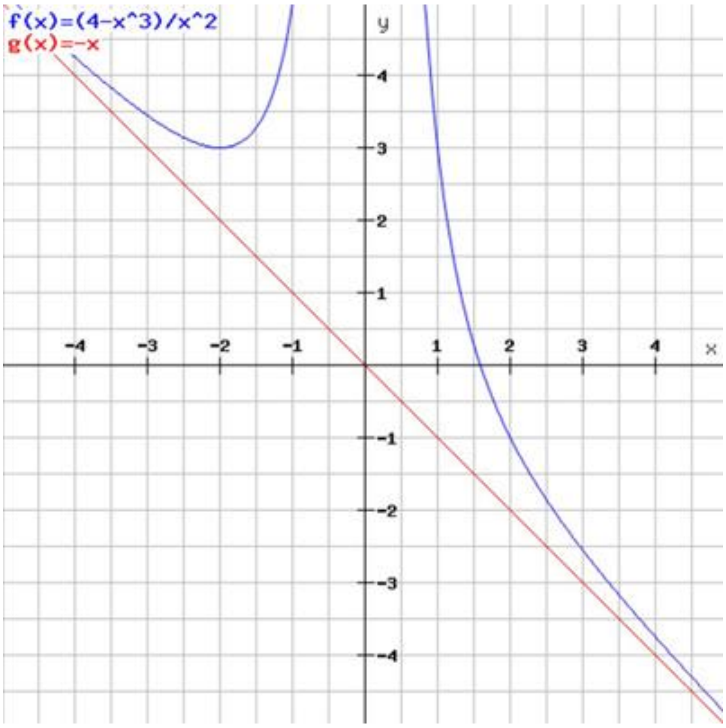
Lösningstips:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+5 = 7 \quad \underbrace{= f(2)}_{\text{krav för kontimuitet}}$$

2. Skissa grafen och eventuella asymptoter för $f(x) = \frac{4-x^3}{x^2}$

Lösningstips:

Man erhåller en lodrät asymptot och en sned asymptot $y = -x$.
Den lodräta bestäms med hjälp av gränsvärde då $x \to 0$ och
den sneda med hjälp av sambanden 4.14 och 4.15 i läroboken
eller med hjälp av polynomdivision.
Teckenstudium av derivatan $f'(x) = -1 - \frac{8}{x^3}$ ger lokalt
lokalt minimum då $x = -2$.



3.

a) Härled derivatan för $f(x) = \cos x$ med hjälp av derivatans definition.

Lösning:

Derivatans definition med tvåsidigt intervall (smidigt för denna funktion) ger

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - (\cos x \cos h + \sin x \sin h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 \sin x \sin h}{2h} = -\sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x$$

b) Härled derivatan för $f(x) = \arccos x$ med hjälp av invers funktion och kedjeregeln.

Lösning:

$$y = \arccos x \quad \Longrightarrow \quad \cos y = x$$

Ledvis derivering ger

$$-\sin y \cdot \frac{dy}{dx} = 1$$

Med hjälp av *trigonometriska ettan* får man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Alltså $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

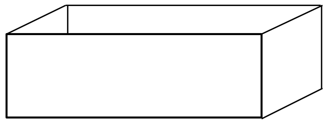
4. Bestäm samtlig lokala extremvärden för

$$f(x) = \frac{3x^{2/3}}{2} - \frac{3x^{4/3}}{4} \quad , \quad x \in [-8, 8]$$

Lösningstips:

- Derivata saknas i origo (singulär punkt) men $f(0) = 0$ ger lokalt minimum
- Stationära punkter $f(-1) = f(1) = \frac{3}{4}$ ger lokala och globalt maximum
- Ändpunkter $f(-8) = f(8) = -6$ ger lokalt och globalt minimum.

5. En låda utan lock har formen av ett rätblock med rektangulär bottenyta som är dubbelt så lång som den är bred. Den totala yttre arean (botten + fyra sidor) är 1 m^2. Bestäm lådans maximala volym.



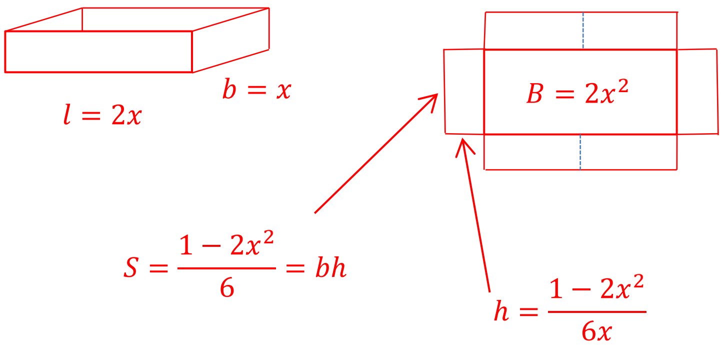
Lösningstips

Genom att välja längden $l = 2x$ och bredden $b = x$

får man en basyta med arean $B = 2x^2$

Kortsidornas sidoytor får därmed arean $S = \frac{1-2x^2}{6}$

Höjden fås genom division med enligt $h = \frac{S}{b} = \frac{\frac{1-2x^2}{6}}{x} = \frac{1-2x^2}{6x}$



Volymen blir därmed $V = Bh = lbh = 2x^2 \cdot \frac{1-2x^2}{6x} = \frac{x-2x^3}{3}$ $för\ x \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Teckenstudium av derivatan ger lokalt maximum för $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

Insättning ger den maximala volymen $V = \frac{2}{9\sqrt{6}}$ m^3 $\approx$ 91 liter

6.

a) Förklara med vardagligt språk innebörden av *Medelvärdessatsen för derivator* och förklara särskilt varför funktionen måste vara deriverbar på hela det aktuella intervallet för att satsen skall gälla.

Lösningstips:

Se sats 4.10 i läroboken och visa med en skiss att med en singulär punkt (derivata saknas) behöver inte satsen gälla.

b) Visa att för $f(x) = \arctan x$ då $x \geq 0$ antar $f'(x)$ alla värden inom intervallet $I =]0, 1]$ minst en gång.

Lösningstips:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

I vänsterkant av intervallet gäller att högerderivatan $f'(0) = 1$ och för mycket höga x-värden gäller att $f'(x) \to 0$. Eftersom att $f'(x)$ precis som $f(x)$ är en kontinuerlig funktion så måste alla mellanliggande värden också antas i minst en punkt – detta enligt satsen om mellanliggande värde (sats 3.9).

7. Låt $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{för } x < \pi \\ kx + m & \text{för } x \geq \pi \end{cases}$

Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar för alla x-värden.

(3 p)

Lösningstips: Västergränsvärdet $\lim_{x \to \pi^-} \sin x = 0$ visar att punkten $(\pi, 0)$ måste ingå som ändpunkt för $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(\pi, 0)$ därmed tillhör $f(x)$ kan vänsterderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt:

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{f(\pi) - f(x)}{\pi - x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\sin \pi - \sin x}{\pi - x} = \lim_{x \to \pi^-} \frac{-\sin x}{\pi - x}$$

Med variabelskiftet $t = \pi - x$ fås

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{-\sin(\pi - t)}{t} = \lim_{t \to 0^-} \frac{-\overbrace{\sin \pi \cos t}^{=0} + \overbrace{\cos \pi \sin t}^{=-\sin t}}{t} = -1$$

Därmed vet man dessutom att $k = -1$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 1$. Annars skulle punkten $(\pi, 0)$ bli en singulär punkt med olika höger- och vänsterderivata.

Insättning av punkten $(\pi, 0)$och $k = -1$ i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger dessutom $m = \pi$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{då } x < \pi \\ \pi - x & \text{då } x \geq \pi \end{cases}$$