Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2014

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2015-08-18, kl. 08:00–13:00			

1.

a) Förenkla uttrycket $\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$. (1 p)

Lösningstips: ”Trigettan” eller hjälptriangel ger $\frac{1}{\sqrt{8}}$

b) Visa att $f(x) = \ln x^2$ saknar invers. (1 p)

Lösningstips: Insättning av olika x-värden med samma belopp ger samma funktionsvärde – alltså är funktionen inte injektiv och saknar därmed invers.

c) Härled Eulers formel för $\sin x$ med hjälp av Eulers första formel:

$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (1 p)

Lösningstips: Subtrahera z och $\bar{z}$ på polär form och lös sedan ut $\sin x$.

2.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$. (1 p)

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten.

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$ då

$$f(x) = \begin{cases} \frac{5x+e^x-1+\sin x}{x} & \text{då } x \neq 0 \\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$ (2 p)

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ ger $A = 7$.

3.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara deriverbar i en punkt $x = a$. (1 p)

Lösningstips: Funktionen skall vara definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet för differenskvoten (se definition 4.1) skall existera ändligt.

b) Härled derivatan till $f(x) = \tan x$ med hjälp av derivatans definition och sambandet $\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$. (2 p)

Lösningstips: Härledning enligt derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h} = \cdots = \lim_{h \to 0} \frac{\tan x + \tan h - \tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{(1 - \tan x \tan h)h}$$

$$= \cdots = \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\tan h}{h}}_{\to 1} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{1 - \underbrace{\tan x \tan h}_{\to 0}} = 1 + \tan^2 x$$

4.

Låt $f(x) = \begin{cases} x^3 + x \text{ då } x > 2 \\ kx + m \text{ då } x \leq 2 \end{cases}$

a) Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig (I) och blir deriverbar (II) för alla x-värden. (2 p)

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms: $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^3 + x) = 10$. Därmed vet man att punkten $(2, 10)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(2, 10)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 + x - 10}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 5)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} (x^2 + 2x + 5) = 13$$

Därmed vet man dessutom att $k = 13$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 2$. Annars skulle punkten $(2, 10)$ bli en singulär punkt (utifrån derivatan) med olika höger- och vänsterderivata.

Insättning av punkten och k-värdet i "räta linjens ekvation" $y = kx + m$ ger dessutom $m = -16$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x \text{ då } x > 2 \\ 13x - 16 \text{ då } x \leq 2 \end{cases}$$

b) Bestäm inversens derivata $(f^{-1})'(-3)$. (1 p)

Lösningstips: Resonemang med symmetri eller med sats 4.6 ger $(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{13}$

5.

Bestäm största och minsta värde för funktionen $f(x) = 2 + x - 3x^{\frac{2}{3}}$ då $x \in [-1,\ 64]$. (3 p)

Lösningstips: Lokala minimipunkter i ändpunkten $x = -1$ och i den stationära punkten $x = 8$ med $f'(x) = 0$ samt lokala maximipunkter i ändpunkten $x = 64$ och i den singulära punkten $x = 0$ där derivata saknas.

Insättning ger minsta värde $f(-1) = f(8) = -2$ och största värde $f(64) = 2 + 64 - 3 \cdot 4^2 = 18$ medan den singulära punktens funktionsvärde $f(0) = 2$ ej ger något globalt extremvärde.

6.

Låt $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x}$

a) Undersök om funktionen har stationära punkter (1 p)

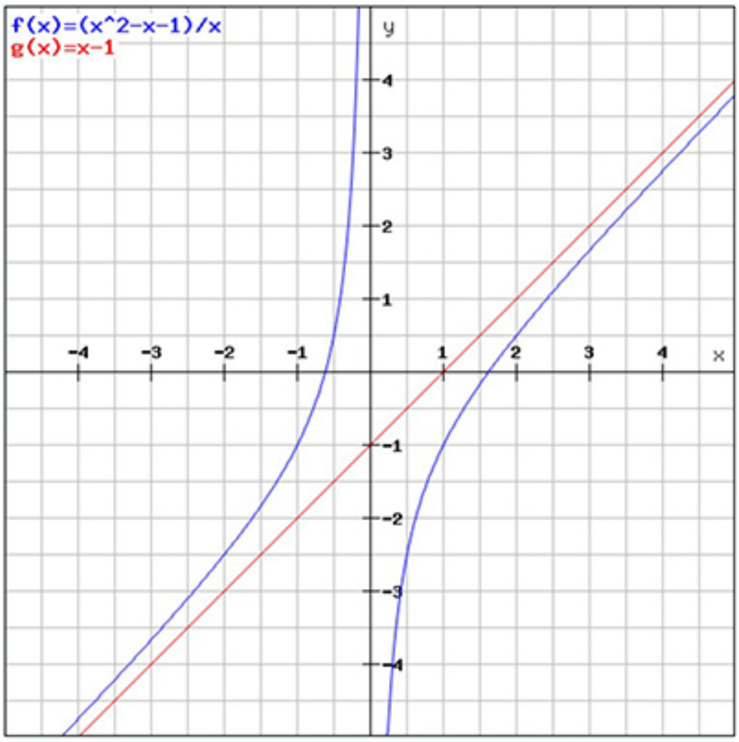
Lösningstips: $f'(x) = \frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1 \neq 0$ och därmed saknas stationära punkter

b) Bestäm samtliga asymptoter (1 p)

Lösningstips: Gränsvärden ger lodrät asymptot $x = 0$. Sned asymptot $y = x - 1$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa grafen (1 p)

Svar:



7.

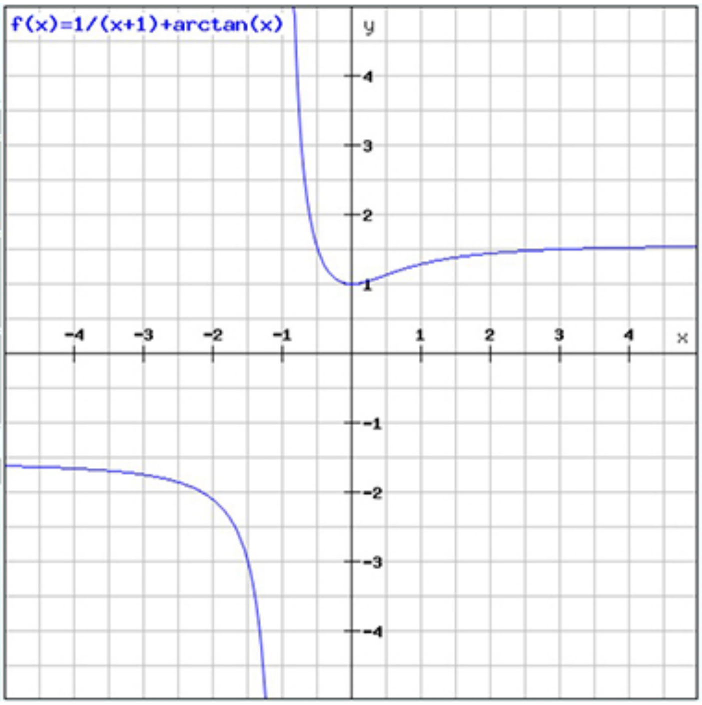
Bestäm värdemängden för

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \arctan x$$

och skissa funktionens kurva.

Lösningstips: Derivatan skriven på formen $f'(x) = \frac{2x}{(x+1)^2(x^2+1)}$ ger enbart en stationär punkt i $x = 0$ (då $y = 1$) och teckenstudium visar att den är en lokal minimipunkt. Utöver detta visar teckenstudium och gränsvärden att $V_f = \left]-\infty, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]1, \infty\right[$

Kurvan skissas:



(3 p)