Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2015

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2016-08-16, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

1.

a) Visa att $f(x) = \cos x$ saknar invers. (1 p)

Lösningstips: Insättning av olika x-värden med samma belopp ger samma funktionsvärde – alltså är funktionen inte injektiv och saknar därmed invers.

b) Härled Eulers formel för $\sin x$ med hjälp av Eulers första formel:

$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (1 p)

Lösningstips: Subtrahera z och $\bar{z}$ på polär form och lös sedan ut $\sin x$.

c) Förenkla uttrycket $\tan\left(\arcsin\frac{1}{4}\right)$. (1 p)

Lösningstips: ”Trigettan” eller hjälptriangel ger $\frac{1}{\sqrt{15}}$

2.

Låt $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x}$

a) Bestäm samtliga stationära punkter (1 p)

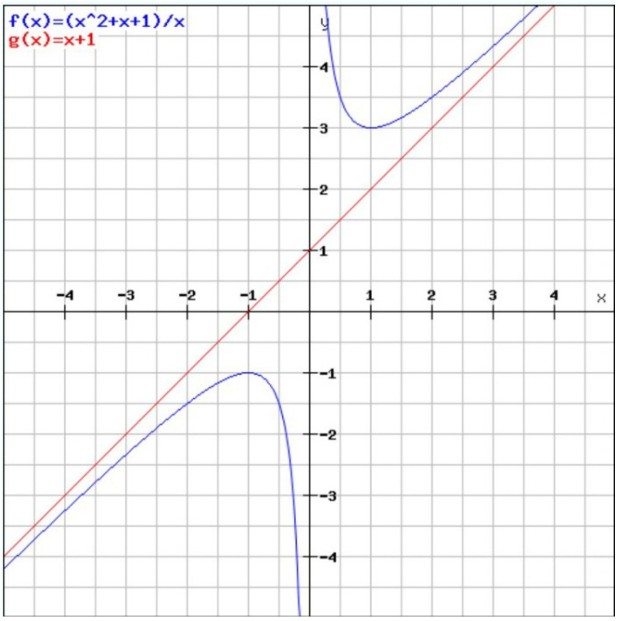
Lösningstips: Lokal minimipunkt $x = 1$ samt lokala maximipunkt $x = -1$

b) Bestäm samtliga asymptoter (1 p)

Lösningstips: Lodrät asymptot $x = 0$ visas med gränsvärde. Sned asymptot $y = x + 1$ som fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa grafen (1 p)

Svar:



3.

a) Ange vad som krävs, enligt definitionen, för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$. (1 p)

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten, eller att $x = a$ är en isolerad punkt.

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$ då

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - \sin 2x}{x} & då\ x \neq 0 \\ A & då\ x = 0 \end{cases}$$ (2 p)

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x \to 0} f(x)$ ger $A = -2$.

4.

a) Ange vad som krävs, enligt definitionen, för att en funktion $f(x)$ skall vara deriverbar i en punkt $x = a$. (1 p)

Lösningstips: Funktionen skall vara definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet för differenskvoten (se definition 4.1) skall existera ändligt.

b) Härled derivatan till $f(x) = \cos x$ med hjälp av derivatans definition. (2 p)

Lösningstips: Härledning enligt derivatans definition – gärna med dubbelsidiga differenskvoten $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ som ger smidig förenkling med hjälp av additions- och subtraktionssats – ger $f'(x) = -\sin x$.

5.

Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter för funktionen

$f(x) = x + 4 - 3x^{\frac{2}{3}}$ då $x \in [-1,\ 27]$. (3 p)

Lösningstips: Ändpunkter, singulära punkter och stationära punkter kontrolleras. För denna funktion får man lokala minimipunkter i ändpunkten $x = -1$ och i den stationära punkten $x = 8$ samt lokala maximipunkter i ändpunkten $x = 27$ och i den singulära punkten $x = 0$ där derivata saknas.

6.

a) Härled sambandet för partiell integration ur sambandet för produktderivata. (1 p)

Lösningstips: Se Bevis av sats 5.4 i läroboken.

b) Bestäm den primitiva funktionen $\int e^{2x} \cos 2x\, dx$ (2 p)

Lösningstips: Upprepad partiell integration ger till slut den ursprungliga integralen i högerledet. Den löses ut och svaret blir $\frac{e^{2x}}{4}(\cos 2x + \sin 2x) + C$.

7.

Låt $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x \text{ då } x > 2 \\ kx + m \text{ då } x \leq 2 \end{cases}$

a) Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig (I) och blir deriverbar (II) för alla x-värden. (2 p)

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms: $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x^3 + 2x) = 12$. Därmed vet man att punkten $(2, 12)$ måste ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ ifall $f(x)$ ska bli kontinuerlig. Tack vare att punkten $(2, 12)$ ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(1) = \lim_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^3+2x-12}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x^2+2x+6)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x^2 + 2x + 6) = 14$$

Därmed vet man dessutom att $k = 14$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 2$. Annars skulle punkten $(2, 12)$ bli en singulär punkt (med avseende på derivatan) med olika höger- och vänsterderivata.

Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger dessutom $m = -16$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x \text{ då } x > 2 \\ 14x - 16 \text{ då } x \leq 2 \end{cases}$$

b) Bestäm inversens derivata $(f^{-1})'(33)$. (1 p)

Lösningstips: Resonemang med symmetri (spegling) utifrån linjen $y = x$ eller med hjälp av sats 4.6 ger svaret $(f^{-1})'(33) = \frac{1}{29}$