Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2016

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2017-04-19, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

1.

Låt $f(x) = \frac{x^2}{x^2-3}$

a) Beräkna eventuella stationära punkter och avgör deras karaktär.

Lösningstips:

$f(x) = \frac{x^2}{x^2-3} = \frac{x^2-3+3}{x^2-3} = 1 + \frac{3}{x^2-3}$ ger $f'(x) = \frac{-6x}{(x^2-3)^2} = 0$ då $x = 0$ som med teckenstudium inses vara lokalt maximum.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

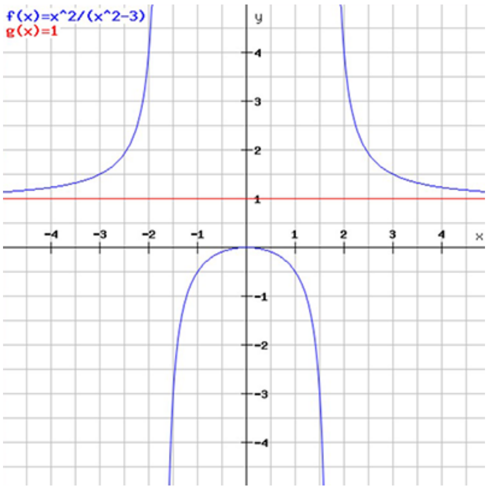
Lösningstips:

Gränsvärden från båda hållen då $x \to \sqrt{3}$ och $x \to -\sqrt{3}$ ger lodräta asymptoter i $x = \sqrt{3}$ och $x = -\sqrt{3}$. Vågrät asymptot $y = 1$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Lösningstips:

Med hjälp av värdetabell med en handfull punkter samt tidigare teckenstudie och gränsvärden får man:



(3 p)

2. Bestäm följande primitiva funktioner:

a)

$$\int \frac{8}{4+x^2}\,dx$$

Lösningstips:

Förkortning med 4 och standardprimitiv ger $4\arctan\frac{x}{2} + C$

b)

$$\int x^2 e^x\,dx$$

Lösningstips:

Partiell integration ger $e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.

c)

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}\,dx$$

Lösningstips:

Kedjeregeln baklänges eller variabelbyte ger $e^{\tan x} + C$

(3 p)

3. Beräkna gränsvärdena:

a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{8x^2}$$

Förlängning med täljarens konjugat ger gränsvärdet $\frac{1}{4}$

b)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 6x}}{2x}$$

Utbrytning av det dominerande ger gränsvärdet $-\frac{1}{2}$

c)

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{6x}\right)^{3x}$$

Standardgränvärdet för e ger svar: $\sqrt{e}$

3 p

4.

a)

Redogör för derivatans definition och rita en förklarande skiss.

Lösningstips:

Se definition 4.1 i Läroboken samt föreläsningsanteckninar

b)

Undersök om

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är deriverbar i $x = 0$

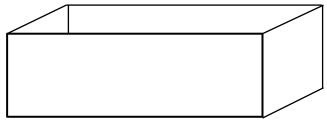
Lösningstips:

Visserligen är $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$ ty $\lim_{x \to 0} \left(1 + \underbrace{x^2 \underbrace{\cos \frac{1}{x}}_{begr}}_{\to 0} \right) = 1$ men detta räcker inte alltid för att $f(x)$ dessutom ska vara deriverbar i $x = 0$.

Användning av derivatans definition i punkten $x = 0$ visar att gränsvärde existerar från båda hållen och därmed är $f(x)$ deriverbar i $x = 0$ med $f'(0) = 0$

3 p

5. En låda utan lock har formen av ett rätblock med rektangulär bottenyta som är dubbelt så lång som den är bred. Den totala yttre arean (botten + fyra sidor) är 6 dm^2. Bestäm lådans maximala volym.



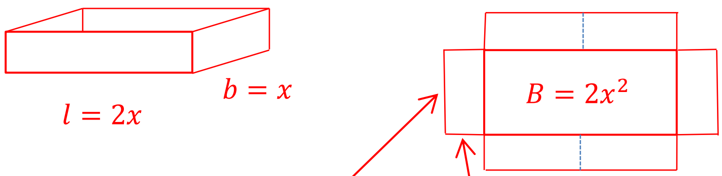
Lösningstips:

Genom att välja längden $l = 2x$ och bredden $b = x$

får man en basyta med arean $B = 2x^2$

Kortsidornas sidoytor får därmed arean $S = \frac{6-2x^2}{6}$

Höjden fås genom division med enligt $h = \frac{S}{b} = \frac{\frac{6-2x^2}{6}}{x} = \frac{6-2x^2}{6x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$



$$S = \frac{6-2x^2}{6} = bh$$

$$h = \frac{6-2x^2}{6x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3}$$

Volymen blir därmed

$$V = Bh = lbh = 2x^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3}\right) = 2x - \frac{2x^3}{3} \ \textit{för}\ x \in [0, \sqrt{3}]$$

och derviering ger

$$V' = 2 - 2x^2 \ \textit{för}\ x \in [0, \sqrt{3}]$$

Teckenstudium av derivatan ger lokalt maximum för $x = 1$

Insättning av $x = 1$ ger den maximala volymen $V = \frac{4}{3}$ dm^3 $\approx$ 1,3 liter

3 p

6. Visa att för $f(x) = \arcsin x$ då $-1 \leq x \leq 1$ antar $f'(x)$ alla värden inom intervallet $I = [1, \infty[$ minst en gång.

Lösningstips:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

I mitten av intervallet gäller att $f'(0) = 1$ och för $x \to 1^-$ och $x \to -1^+$ gäller att $f'(x) \to \infty$. Eftersom att $f'(x)$ också är en kontinuerlig funktion måste (enligt sats) alla mellanliggande värden antas minst en gång (sats 3.9), vilket skulle visas.

Fotnot: Notera att man inte har visat att andra värden inte antas.

7.

Bestäm värdemängden för

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - \arctan x$$

och skissa funktionens kurva.

Lösningstips:

Definitionsmängder har ett hål i $x = 1$ och därmed har denna kontinuerliga funktion en tvådelad kurva.

Derivering ger

$$f'(x) = -\frac{-1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{(1-x)^2(x^2+1)} - \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2(x^2+1)} = \frac{2x}{(1-x)^2(x^2+1)}$$

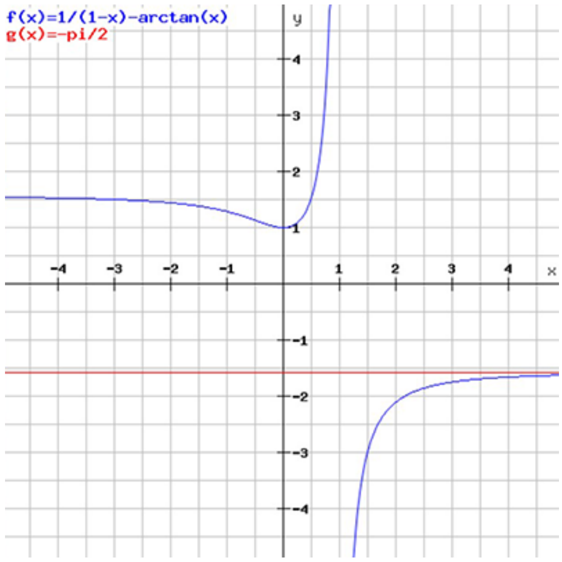
som visar att det bara finns en stationär punkt och den finns på den vänstra delen i $x = 0$.

Teckenstudium av derivatan ger kurvans form med en lokal minimipunkt i $x = 0$ (med $y = 1$).

Gränsvärden i $x = 1$ och då $x \to \pm\infty$ visar att

$$V_f = \left]-\infty, -\frac{\pi}{2}\right[\cup [1, \infty[$$

Kurvan skissas med hjälp av enstaka utvalda punkter och med hjälp av informationen från teckenstudien:



(3 p)