Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2016

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva			
Skrivtid:	2017-08-15, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

1.

a) Bestäm

$$\int \frac{8x}{1+x^2}\,dx$$

Lösningstips:

Man finner derivatan av nämnaren i täljaren (se regel 5.3 c) och får

$$4\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = 4\ln(1+x^2) + C$$

b) Bestäm

$$\int x^2 e^x dx$$

Lösningstips:

Två varv partiell integration med derivering av x^2 ger

$$\int x^2 e^x dx = \cdots = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

c) Bestäm

$$\int \ln x^2\,dx$$

Lösningstips:

Logaritmlag 2.6 och partiell integration med derivering av $\ln x$ ger

$$\int \ln x^2\,dx = \int 2\ln x\,dx = \cdots = 2x\ln x - 2x + C$$

(3 p)

2. Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(e^{6x} - 1)\sin x^2}{x^2 \arctan 3x} & \text{för} \quad x \neq 0 \\ A & \text{för} \quad x = 0 \end{cases}$$

3 p

Lösningstips:

Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{6x}-1)\sin x^2}{x^2 \arctan 3x}$ bestäms med hjälp av standardgränsvärden och detta gränsvärde ger funktionsvärdet $A = 2$ som enligt definitionen för kontinuitet gör att $f(x)$ blir kontinuerlig för alla x.

3.

a) Förenkla uttrycket $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$

Lösningstips:

”Trigettan” eller hjälptriangel ger svaret $\frac{4}{5}$

b) Visa att $f(x) = \arctan x$ har invers

Lösningstips:

Genom att visa att funktionens derivata $f'(x) > 0$ för alla x följer enligt sats att $f(x)$ är strängt växande vilket är tillräckligt för att den skall vara injektiv och alltså ha invers.

c) Visa att $f(x) = \tan x$ saknar invers

Lösningstips:

Då det finns olika vinklar som har samma funktionsvärde $\left(\text{såsom } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1\right)$ är funktionen inte injektiv och saknar därmed invers.
Däremot är restriktionen $f(x) = \tan x$ för $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ injektiv och har inversen $f^{-1}(x) = \arctan x$

3 p

4. Para ihop funktion med korrekt påstående genom att skissa kurvor och resonera:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \ 0 \le x \le 1 \\ x-3 & , \ 3 \le x \le 5 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \ 0 \le x \le 1 \\ x-4 & , \ 2 \le x \le 4 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \ 0 \le x \le 1 \\ x-3 & , \ 2 < x \le 4 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & , \ 0 \le x \le 1 \\ x-4 & , \ 1 < x \le 3 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & , \ 0 \le x \le 1 \\ x-3 & , \ 1 < x \le 3 \end{cases}$

i) Funktionen är kontinuerlig, är strängt monoton och har diskontinuerlig invers.

ii) Funktionen är diskontinuerlig, är strängt monoton och har kontinuerlig invers.

iii) Funktionen är kontinuerlig, strängt monoton och har kontinuerlig invers.

iv) Funktionen är kontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers.

v) Funktionen är diskontinuerlig, är inte strängt monoton och saknar invers.

3 p

Svar: a = iii, b = iv, c = i, d = v och e = ii

5.

Låt $f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^3}$

a) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

Polynomdivision ger

$$f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$$

med sned asymptot

$$y = x$$

Gränsvärde runt origo ger lodrät asymptot

$$x = 0$$

b) Bestäm samtliga stationära punkter.

Lösningstips:

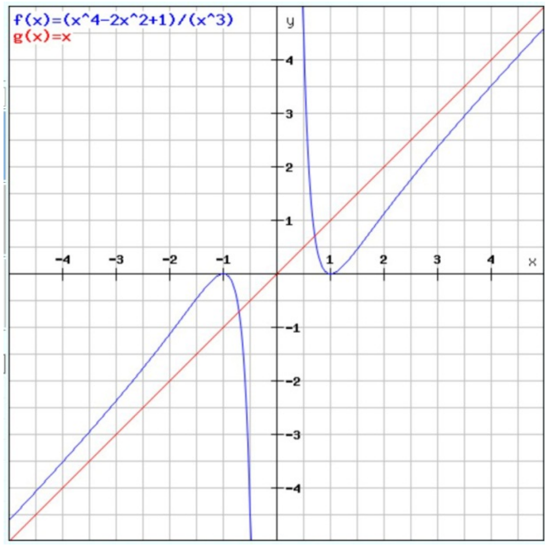
$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}$$

Derivatans nollställen bestäm genom ledvis multiplikation med x^4. Stationära punkter är $x = \pm 1$ (se bild nedan).

c) Skissa grafen.

Lösningstips:

Teckenstudium ger



3 p

6.

a) Undersök om funktionen $f(x) = \sqrt{|x|}$ är deriverbar i origo.

Lösningstips:

Deriverbarhet i origo kräver att högerderivatan och vänsterderivatan är lika i origo. Då ex. högerdervatan tas fram med hjälp av derivatans definition får man $f'(0^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{|h|} - \sqrt{|0|}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$ och därmed saknas ändligt gränsvärde och funktionen inte deriverbar i origo. Detsamma gäller för vänsterderivatan som nu inte behöver tas fram.

b) Låt $f(x) = \tan x$ och bestäm $f'(x)$ med hjälp av derivatans definition

Ledning:

$$\tan(u+v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v}$$

Lösningstips:

Derivatans definition (Def 4.1) ger för $f(x) = \tan x$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\tan x + \tan h}{1 - \tan x \tan h} - \tan x}{h}$$

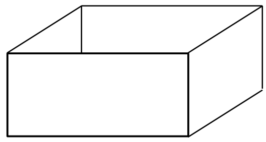
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan x + \tan h - \tan x\,(1 - \tan x \tan h)}{h(1 - \tan x \tan h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{\tan h}{h}}_{\substack{sgv \\ \to 1}} \cdot \frac{1 + \tan^2 x}{\underbrace{1 - \tan x \underbrace{\tan h}_{\to 0}}_{\to 0}} = 1 + \tan^2 x$$

(3 p)

7.

En låda utan lock har formen av ett rätblock med kvadratisk bottenyta. Den totala ytterarean (botten + fyra lika sidor) är 300 cm^2. Bestäm lådans maximala volym.



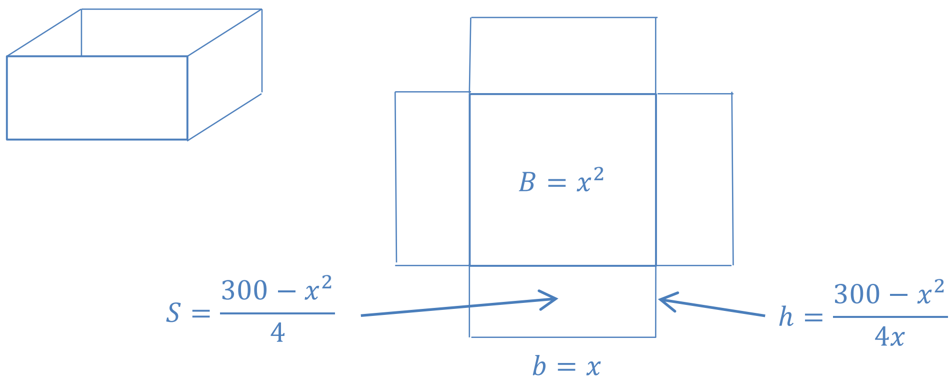
3 p

Lösningstips

Genom att välja baskanten $b = x$ får man basyta med arean $B = x^2$

Fyra lika sidoytor får därmed arean $S = \frac{300-x^2}{4}$

Höjden fås genom division enligt $h = \frac{\frac{300-x^2}{4}}{x} = \frac{300-x^2}{4x}$



Volymen blir därmed $V = Bh = \frac{300x-x^3}{4}$ *för* $x \in \left[0, \sqrt{300}\right]$

Teckenstudium av derivatan ger maximum för $x = 10$ och

insättning ger den maximala volymen $V = 500$ cm^3 $\approx 0{,}5$ liter