Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kurs given HT2017

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0–2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall, gradskiva och linjal			
Skrivtid:	2018-04-04, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

1.

a) Bestäm den obestämda integralen

$$\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$$

Lösningstips: Substitution av den inre funktionen $u = \ln x$ eller kedjeregeln baklänges ger svaret $-\cos(\ln x) + C$

b) Härled sambandet för partiell integration, ur sambandet för produktderivata.

Lösningstips: Se Bevis av sats 5.4 i läroboken eller föreläsning s anteckningarna.

c) Bestäm den obestämda integralen

$$\int e^x \sin x\,dx$$

Lösningstips: Upprepad partiell integration ger den ursprungliga integralen efter två varv. Denna löses då ut och man får svaret $\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$

(3 p)

2.

a) Förenkla uttrycket

$$\tan\left(\arccos\frac{4}{5}\right)$$

Lösningstips: ”Trig-ettan” eller hjälptriangel och Pythagoras Sats ger svaret $\frac{3}{4}$

b) Härled Eulers formel för $\sin x$ med hjälp av Eulers första formel:

$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$

Lösningstips: Subtrahera z och $\bar{z}$ på polär form och lös sedan ut $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}$

.

c) Välj en funktion som har invers – trots att den varken är strängt växande eller strängt avtagande – och bestäm funktionens invers.

Lösningstips: Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ är ett bra exempel; den är injektiv och har inversen $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$ (råkar vara samma funktion) och den är varken strängt växande eller strängt avtagande.

(3 p)

3.

a) Definiera vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara deriverbar i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Funktionen skall vara definierad i en omgivning till $x = a$ och gränsvärdet för differenskvoten (se definition 4.1) skall existera ändligt i $x = a$.

b) Härled derivatan till $f(x) = \ln 2x + \sin x$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Härledning enligt derivatans definition – en term i taget om så önskas. Gärna med den dubbelsidiga differenskvoten $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ för sinustermen. Standardgränsvärden ger till sist derivatan $f'(x) = \frac{1}{x} + \cos x$.

(3 p)

4. Låt

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 8}$$

a) Bestäm eventuella stationära punkter.

Lösningstips: $f'(x) = 0$ och teckenstudium av derivatan ger terraspunkt i $x = 0$

b) Bestäm samtliga asymptoter.

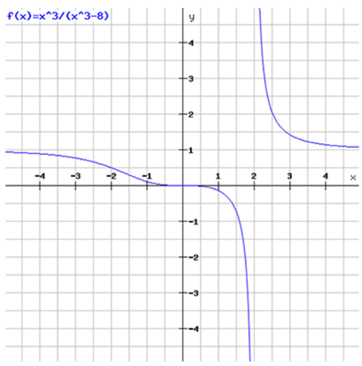
Lösningstips: Gränsvärdesstudie – på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken – ger vågrät asymptot $y = 1$.
Notera att den sneda/vågräta asymptotens ekvation $y = 1$ också kan inses m.h.a. följande omskrivning:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^3 - 8} = \frac{x^3 - 8 + 8}{x^3 - 8} = 1 + \frac{8}{x^3 - 8} \to 1 \text{ då } x \to \pm\infty$$

Ytterligare gränsvärdesstuider ger lodrät asymptot $x = 2$.

c) Skissa grafen

Lösningstips: Teckenstudie av förstaderivatan samt värdetabell ger följande graf:

Svar: 

(3 p)

5. Komplettera följande påståenden med någon passande text, t.ex. från någon sats:

a) Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig och strängt monoton på intervallet $[a, b]$...

Lösningstips: T.ex. fortsättning enligt Sats 3.5 – Satsen om *kontinuitet hos invers*

b) Om en funktion $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och $f(a) \neq f(b)$ så gäller att…

Lösningstips: T.ex. fortsättning enligt Satsen om mellanliggande värde eller enligt Medelvärdessatsen för derivator

c) Om funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner på intervallet $[a, b]$ samt att $f(a) > g(a)$ och $f(b) < g(b)$ så gäller att…

Lösningstips: T.ex. fortsättning enligt *följdsatsen* till Satsen om mellanliggande värde

(3 p)

6.

Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x \text{ då } x > 1 \\ kx + m \text{ då } x \leq 1 \end{cases}$$

a) Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig (I) och blir deriverbar (II) för alla x-värden.

Lösningstips: Högergränsvärdet till $x = 1$ bestäms:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^3 + 2x) = 3$$

Därmed vet man att punkten $(1, 3)$ skall ingå som ändpunkt till den räta linjen – ett krav för att $f(x)$ skall bli kontinuerlig. Tack vare detta kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt:

$$f'_{höger}(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^3 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 3)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x^2 + x + 3) = 5$$

Därmed vet man dessutom att den räta linjen måste ha $k = 5$; detta så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 1$. Med fel k-värde skulle punkten $(1, 3)$ bli en singulär punkt med olika höger- och vänsterderivata.

Insättning av punkten $(1, 3)$ och $k = 5$ i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger nu att $m = -2$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x \text{ då } x > 1 \\ 5x - 2 \text{ då } x \leq 1 \end{cases}$$

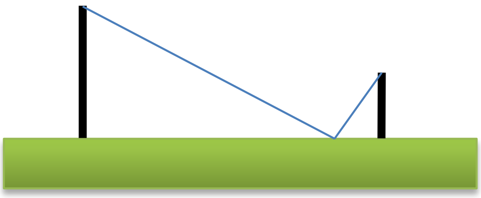
b) Bestäm inversens derivata $(f^{-1})'(12)$.

Lösningstips: Vid spegling i linjen $y = x$ gäller att inversens x-värde motsvara den ordinarie funktionens y-värde och tvärt om. Sats 4.6 eller resonemang med symmetri mellan inversens punkt $(12, 2)$ och spegelpunkten $(2, 12)$ hos den ordinarie funktionen ger att $(f^{-1})'(12) = \frac{1}{14}$. Detta tack vare att derivatan är känd i för den ordinarie funktionen i punkten $(2, 12)$.

(3 p)

7.

På plan mark med avståndet 12 meter finns två lodräta stolpar. Den ena är 6 meter hög och den andra 3 meter hög. En lina skall spännas från toppen av den ena stolpen, ner till marken och vidare till den andra stolpens topp. Visa genom en max- och min-studie att linans minimala längd blir 15 meter.



Lösningstips: Pythagoras Sats ger ett uttryck för linans längd:

$$s(x) = \sqrt{6^2 + x^2} + \sqrt{3^2 + (12 - x)^2}\ ,\ x \in \mathbb{R}$$

Förenkling och derivering ger

$$s'(x) = \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}}$$

som är definierad för *alla* x ty nämnarna är båda strängt positiva.

Därmed saknas både ändpunkter och singulära punkter (derivatan existerar för alla x) så att enbart stationära punkter är av intresse:

$$L'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} + \frac{x - 12}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}} = \frac{12 - x}{\sqrt{x^2 - 24x + 153}}$$

Båda leden kvadreras (risk för att falska rötter uppkommer) och ekvationen löses

$$\frac{x^2}{36 + x^2} = \frac{x^2 - 24x + 144}{x^2 - 24x + 153}$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 - 24x + 153) = (36 + x^2)(x^2 - 24x + 144)$$

$$\Leftrightarrow \quad 27x^2 - 864x + 5184 = 0$$

Division (tre gånger med 3) ger

$$x^2 - 32x + 192 = 0$$

och kvadratkomplettering eller faktorisering enligt

$$(x - 24)(x - 8) = 0$$

ger förslagen punkterna i $x = 24$ eller $x = 8$ men insättning i den ursprungliga ekvationen visar att $x = 24$ är en ”falsk rot” som p.g.a. kvadreringen. Teckenstudium av derivatan visar att $x = 8$ ger ett minimum och minimilängden blir

$$s(8) = \sqrt{6^2 + 8^2} + \sqrt{3^2 + (12 - 8)^2} = \sqrt{100} + \sqrt{25} = 15$$

(3 p)