Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT2017

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1 inom ett år tillbaka			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2018-08-21, kl. 08:00–13:00			

1.

Låt $f(x) = \frac{4+x^3}{x^2}$

a) Beräkna eventuella stationära punkter och avgör deras karaktär.

Lösningstips:

$f(x) = \frac{4+x^3}{x^2} = \frac{4}{x^2} + x$ ger $f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0$ då $x = 2$

som med teckenstudium inses vara lokalt minimum.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

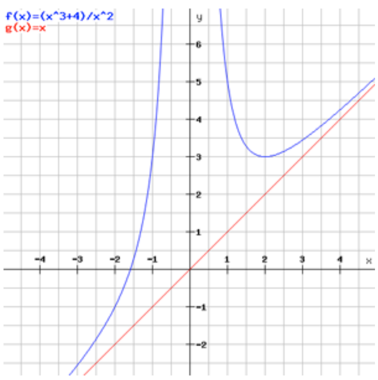
Lösningstips: Gränsvärden då $x \to 0$ och ger lodrät asymptot $x = 0$.

Sned asymptot $y = x$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken

eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Svar:



(3 p)

2.

Låt

$$f(x) = 2x^3 + 3x^{\frac{1}{3}}$$

a) Visa att $f(x)$ har invers.

Lösningstips: Eftersom att $f'(x) = 6x^2 + x^{-\frac{2}{3}} = 6x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0$ för alla x följer enligt sats 4.8 att funktionen är strängt växande och därmed är funktionen omvändbar och har invers.

b) Beräkna $(f^{-1})'(5)$ för $f(x) = 2x^3 + 3x^{\frac{1}{3}}$.

Lösningstips: Sats 4.6 eller resonemang utifrån symmetri med spegelpunkter ger $(f^{-1})'(5) = \frac{1}{7}$

(3 p)

3. Medelvärdessatsen för derivator

a) Vad säger satsen?

Lösningstips: Se sats 4.10 och föreläsning 9

b) Förklara med en skiss varför satsen inte gäller ifall funktionen inte är deriverbar i en eller flera inre punkter av aktuellt intervall.

Lösningstips: Se föreläsning 9 med förklarande bild och kommentar till singulära punkter

(3 p)

4.

a) Härled derivatan $f'(x)$ till $f(x) = x^3 + e^{3x}$ med hjälp av *derivatans definition*.

Lösningstips: Derivatan kan härledas termvis (termen e^{3x} med hjälp av standardgränsvärde) och man får som väntat $f'(x) = 3x^2 + 3e^{3x}$

b) Härled derivatan $f'(x)$ till $f(x) = \arccos x$ på valfritt sätt.

Lösningstips: $y = \arcsin x$ ger $\sin y = x$ för $y \in [0, \pi]$. Ledvis derivering (glöm ej inre derivatan) och ”trigettan” ger sedan $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ för $x \in]-1, 1[$

(3 p)

5. Bestäm följande primitiva funktioner:

a)

$$\int \frac{6x-8}{1+x^2}\,dx$$

Lösningstips: Sats 5.2 och Sats 5.3 ger $3\ln(1+x^2) - 8\arctan x + C$

b)

$$\int \sin x \cos x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration eller kedjeregeln baklänges eller variabelbyte eller ger $-\frac{\cos^2 x}{2} + C$ eller $\frac{\sin^2 x}{2} + D$ medan ”dubbla vinkeln” ger $-\frac{\cos 2x}{4} + E$. Noterar att alla tre alternativen är korrekta men har konstanter som är förskjutna sinsemellan.

c)

$$\int xe^{-x^2}\,dx$$

Lösningstips: Kedjeregeln baklänges eller variabelbyte ger $-\frac{e^{-x^2}}{2} + C$

(3 p)

6.

a) Ange vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x\to a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten, eller att $x = a$ är en isolerad punkt.

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{7x}-1-\ln(1+3x)}{x} & \text{då } x \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[\cup \left]0, \infty\right[\\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x\to 0} f(x)$ bestäms med hjälp av standardgränsvärden och man får $A = 4$.

(3 p)

7. En plåtburk rymmer ca 16 centiliter dryck och har den exakta volymen $V = 54\pi$ cm³. Beräkna den minsta arean plåt, till två basytor och en mantelyta, som kan skapa denna burk som har formen av en rak cirkulär cylinder.

Lösningstips:

$$\begin{cases} Volymen = V = 54\pi\ (\text{cm}^3) \\ Basytan = B = \pi r^2 \\ V = Bh \end{cases} \Rightarrow \quad h = \frac{54}{r^2}$$

$$Omkretsen = o = 2\pi r$$

$$Mantelytan = M = oh = 2\pi r\frac{54}{r^2} = \frac{108\pi}{r}$$

$$Total\ area = A = 2B + M = 2\pi r^2 + \frac{108\pi}{r}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dr} = 4\pi r - \dfrac{108\pi}{r^2} \\ \dfrac{dA}{dr} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{27} = 3\ (\text{cm})$$

Teckenstudie av $\frac{dA}{dr}$ visar att $r = 3$ ger minimal area $A = 2 \cdot 9\pi + 36\pi = 54\pi \approx 170\ (\text{cm}^2)$

(3 p)