

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kurs given HT 2018

Examination: TEN 1, TNIU22

Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p

Bonus: 0–2 p grundad på KTR1

Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.

Hjälpmedel: Skrivdon, passare, kurvmall, gradskiva och linjal

Skrivtid: 2019-04-24, kl. 08:00–13:00

Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1. Beräkna följande integraler:

a)

$$\int 5x \cos x \, dx$$

Ledning: Partiell integration ger svaret $5x \sin x + 5 \cos x + C$

b)

$$\int 8x e^{x^2} \, dx$$

Ledning: Substitution eller kedjeregeln baklänges ger svaret $4e^{x^2} + C$

c)

$$\int \frac{1}{4 + x^2} \, dx$$

Ledning: Utbrytning som omvandlar fyran till en etta ger svaret $\frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C$

(3 p)

2. Tre (av fyra) sidor hos en rektangel har den totala längden 120 m. Beräkna rektangelns maximala area.

(3 p)

Ledning: Funktionen $A(x) = x(120 - 2x)$ har stationär punkt med maximum i punkten $x = 30$ m som ger den maximala arean 1800 m^2 .

3. Bestäm k och m så att funktionen $f(x)$ blir både kontinuerlig och deriverbar:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 2 \\ kx + m & , \quad x > 2 \end{cases}$$

Ledning: Ändpunkten för den vänstra "delfunktionen" är $(2, 4)$ och derivatans definition ger vänsterderivatan = 4 i denna punkt. Denna vänsterderivata måste stämma med den högra "delfunktionens" riktningskoefficient. Insättning av dessa värden ($x = 2, y = 4$ och $k = 4$) i räta linjens ekvation $y = kx + m$ ger den högra delfunktionen $y = 4x - 4$
(3 p)

4. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{(e^{4x} - 1) \arctan 5x}$$

Ledning: Standardgränsvärden ger svaret $\frac{1}{10}$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{3x}$$

Ledning: Förlängning med täljarens konjugat följt av utbrytning av $|x|$ ger svaret $-\frac{1}{3}$

3 p

5. Medelvärdessatsen för derivator

a) Vad säger satsen?

Ledning: Se Sats 4.10 i läroboken

b) Visa med hjälp av skiss och beräkningar varför satsen inte gäller för funktionen

$$f(x) = |x|$$

Ledning: Funktionen $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{för } x \geq 0 \\ -x & \text{för } x < 0 \end{cases}$ är deriverbar med derivatan ± 1

i alla punkter förutom i $x = 0$ där derivata saknas. Genom att välja satsens $x = a$ och

$x = b$ på var sin sida om $x = 0$ får man en differenskvot $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ som omöjligt

kan få anta värdena ± 1 som är de enda existerande värdena för $f'(\xi)$. Därmed

gäller ej satsen för denna funktion.

(3 p)

6. Funktionen

$$f(x) = x \arctan x$$

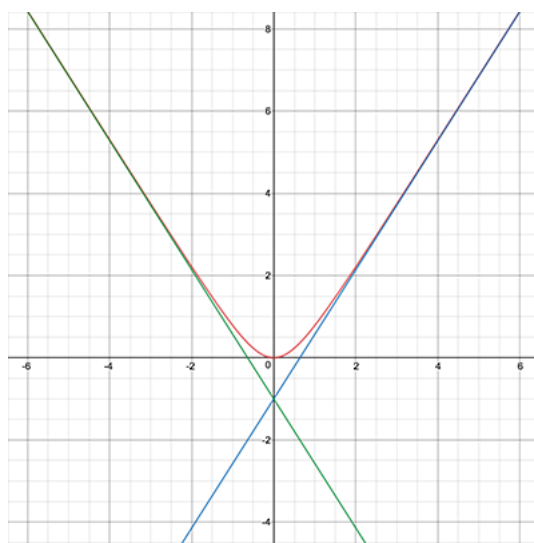
har endast en stationär punkt.

a) Bestäm funktionens sneda asymptoter.

Ledning: Sneda asymptoter bestäms på samma sätt som i Exempel 3.36 i läroboken och man får $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ till höger och $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ till vänster.

b) Skissa funktionens kurva med tillhörande asymptoter.

Ledning: Enklare värdetabell ger



(3 p)

7. Bestäm funktionens värdemängd:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln \sqrt{x} + \arctan x, \quad x > 0$$

Ledning: För $x > 0$ gäller att $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{1+x^2} = \dots = \frac{x^3+x-2}{2x^2(1+x^2)} = 0$ endast

för $x = 1$ som därmed är den enda stationära punkten. Singulära punkter saknas då $f'(x)$ också är definierad för alla $x > 0$. Ändpunkter saknas.

Vidare gäller att $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$ (en följd av Sats 3.13) och $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Teckenstudie av derivatan visar att minimum antas i $x = 1$ så att

$$V_f = \left[1 + \frac{\pi}{4}, \infty\right[$$

(3 p)