Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2014

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar, tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Inga			
Skrivtid:	2014-06-11, kl. 14:00–19:00			

1.

Ange den lösning av den linjära differentialekvationen

$$y' - \frac{y}{x} = 3x^3 + x \quad , \quad x > 0$$

som uppfyller $y(1) = 9$

(3 p)

Lösningstips:

Differentialekvationen är linjär av första ordningen och löses enklast genom multiplikation med en integrerande faktor

$$h(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = \frac{1}{|x|}$$

För $x > 0$ väljer vi multiplikation med faktorn $\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 3x^2 + 1$$

som ger ett vänsterled som kan skrivas som ”derivatan av en produkt”

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}y\right) = 3x^2 + 1$$

Ledvis integration ger

$$\frac{1}{x}y = x^3 + x + C$$

Till sist löses y ut och C bestäms med hjälp av villkoret

$$y = x^4 + x^2 + 7x$$

2.

Ange samtliga lösningar till differentialekvationen

$$y'' + y = 25xe^{2x}$$

(3 p)

Lösningstips:

Inledningsvis löser man den homogena ekvationen

$$y'' + y = 0$$

med hjälp av dess karaktäristiska ekvation

$$r^2 + 1 = 0$$

som har lösningarna

$$r = \pm i$$

Den homogena ekvationens lösningar blir

$$y_h = A\cos x + B\sin x$$

Notera att y_h inte löser den ordinarie ekvationen (annat högerled) men y_h kompletterar y_p (som nu skall bestämmas) så att de tillsammans bildar den allmänna lösningen.

Ansats väljs till $y_p = z(x)e^{2x}$ med $z(x) = Cx + D$ eller direkt enligt

$$y_p = (Cx + D)e^{2x}$$

Ansatsen är baserad på båda ledens utseende.

Insättning av y_p och y_p'' i ekvationen ger efter beräkningar

$$C = 5 \text{ och } D = -4$$

och därmed partikulärlösningen

$$y_p = (5x - 4)e^{2x}$$

Den allmänna lösningen blir

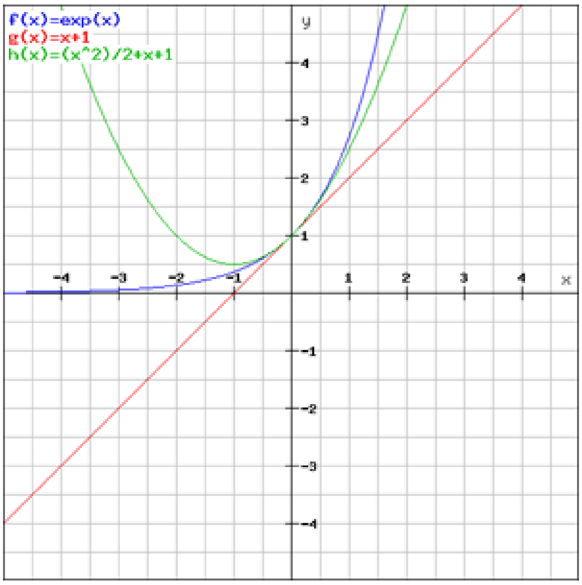
$$y = y_p + y_h = (5x - 4)e^{2x} + A\cos x + B\sin x$$

3.

a) I en omgivning till $x = 0$:
Skissa kurvan till $f(x) = e^x$ samt kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 1 och grad 2 i ett *gemensamt* koordinatsystem.

Lösningstips:

Kurvor tillhörande Maclaurin-polynomen $p_1(x) = 1 + x$ och $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ samt funktionen $f(x) = e^x$ skissas och man ser att $p_2(x)$ bättre approximerar $f(x)$ än vad $p_1(x)$ gör, i en omgivning till $x = 0$.



b) Bestäm gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)(e^{2x}-1)}{x\sin x^2}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos 3x)(e^{2x}-1)}{x\sin x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1-\left(1-\frac{(3x)^2}{2}+O(x^4)\right)\right)\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+O(x^3)-1\right)}{x\left(x^2+O(x^6)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{9x^3+O(x^4)}{x^3+O(x^7)} = \lim_{x\to 0} \frac{9+O(x)}{1+O(x^4)} = 9$$

Även användning av standardgränsvärde tillsammans med förlängning av konjugat ger en smidig lösning.

Svar: 9

(3 p)

4.

Bestäm volymen av den kropp som uppkommer då området innanför

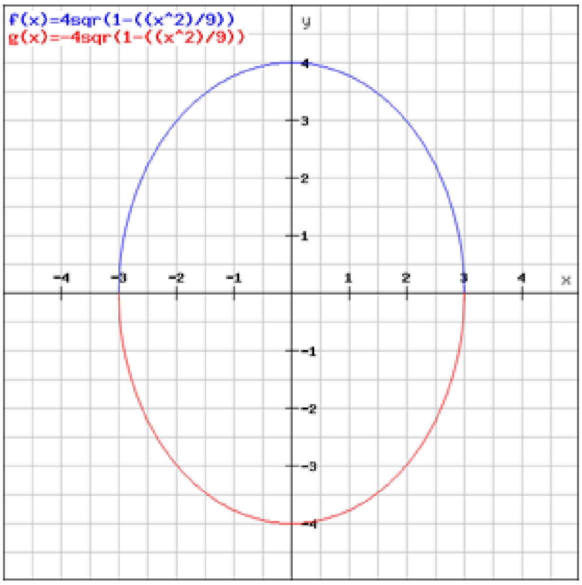
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

roterar runt x-axeln.

Lösningstips:

Man löser ut y ur ellipsens ekvation och får de två funktionerna

$$y = \pm 4\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$



som har skärningspunkter med x-axeln i -3 och 3.

Den övre väljs att rotera runt x-axeln, skivformeln ger då volymelementet

$$dV = \pi y^2 dx = 16\pi\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx$$

Hela volymen blir

$$V = 16\pi\int_{-3}^{3}\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)dx = 16\pi\left[x - \frac{x^3}{27}\right]_{-3}^{3} = 64\pi$$

5.

a) Bestäm $a \in \mathbb{R}$ så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1+x^2} & \text{då } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

blir en täthetsfunktion för någon stokastisk variabel X.

Lösningstips:

Definitionen för täthetsfunktion ger den bestämda integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{a}{1+x^2}\,dx = [a \arctan x]_0^1 = a \arctan 1 = \frac{a\pi}{4} \underbrace{=1}_{krav}$$

vilken kräver att $a = \frac{4}{\pi}$

b) Bestäm differensen mellan det förväntade värdet och medianen.

Lösningstips:

Man utesluter direkt att differensen blir 0 eftersom att funktionen inte är symetrisk inom det aktuella intervallet $0 \leq x \leq 1$.

Det förväntade värdet (väntevärdet) fås genom

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}[\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{2}{\pi}\ln 2$$

Medianen $x_{0.5}$ fås genom bestämning av integrationsgränsen b ur den bestämda integralen

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

I detta fall

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \frac{4}{\pi}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{4}{\pi}[a \arctan x]_0^b = \frac{4}{\pi}\arctan b \underbrace{=\frac{1}{2}}_{krav}$$

och integrationsgränsen (i detta fall medianen) blir

$$x_{0.5} = b = \tan\frac{\pi}{8}$$

Differensen $E(X) - x_{0.5}$ blir

$$\frac{2}{\pi}\ln 2 - \tan\frac{\pi}{8} \approx 0{,}03$$

(3 p)

6.

En fallande sten rör sig enligt parameterkurvan

$$\begin{cases} x(t) = 10t \\ y(t) = -5t^2 \end{cases} \quad \text{då } 0 \leq t \leq 1$$

Bestäm fallkurvans längd.

Lösningstips:

Derivering ger

$$\begin{cases} x'(t) = 10 \\ y'(t) = -10t \end{cases}$$

som beskriver stenens fart i sidled respektive höjdled.

Längden av ett kurvelement blir

$$\begin{cases} ds = \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}\,dt \\ x'(t) = 10 \\ y'(t) = -10t \end{cases} \sim \quad ds = \sqrt{100 + (-10t)^2} = 10\sqrt{1 + t^2}$$

och hela kurvans längd ges av integralen

$$s = 10 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt$$

$$= 10\left[t\sqrt{1 + t^2}\right]_0^1 - 10 \int_0^1 t\,\frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}\,dt$$

$$= 10\left[t\sqrt{1 + t^2}\right]_0^1 - \underbrace{10 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt}_{\text{den ursprungliga igen}} + 10 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,dt$$

som efter addition av den återkommande integralen

$$2s = 20 \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\,dt = 10\left[t\sqrt{1 + t^2}\right]_0^1 + 10 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}\,dt$$

och halvering ger den sökta kurvlängden

$$s = 5\left[t\sqrt{1 + t^2}\right]_0^1 + 5\left[\ln\left(t + \sqrt{1 + t^2}\right)\right]_0^1 = 5\sqrt{2} + 5\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \approx 11{,}5$$

Fotnot: (Det hela kan liknas vid att en hundrameterslöpare med full fart springer utför ett stup och faller fritt i en båge med längden ca 11,5 meter.

7.

Använd bl.a. Analysen huvudsats för att finna den enda lösningskurvan $y(x)$ som uppfyller

$$\int_1^x y(t)dt + y(x) = 2e^x$$

(3 p)

Lösningstips:

Man inser inledningsvis att den sökta lösningskurvan $y(x)$ passerar punkten $(1, 2e)$ – detta eftersom att $x = 1$ ger

$$\underbrace{\int_1^1 y(t)dt}_{=0} + y(1) = 2e$$

som ger villkoret

$$y = 2e \text{ då } x = 1$$

Ledvis derivering – integralen deriveras enligt Analysens huvudsats – ger den linjära differentialekvationen

$$y(x) + y'(x) = 2e^x$$

Multiplikation med integrerande faktor e^x ger

$$e^x y(x) + e^x y'(x) = 2e^{2x}$$

vars vänsterled kan skrivas som derivata av produkt enligt

$$\frac{d}{dx}\big(e^x y(x)\big) = 2e^{2x}$$

och ledvis integration ger

$$e^x y(x) = e^{2x} + C$$

Till sis löses $y(x)$ ut

$$y(x) = e^x + \frac{C}{e^x}$$

Och villkoret $y(1) = 2e$ ger $C = e^2$ så att

$$y(x) = e^x + \frac{e^2}{e^x}$$

$$y(x) = e^x + e^{2-x}$$