Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kursen VT2015

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2015-03-19, kl. 14:00–19:00			

1.

Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x} + 10\cos x$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 1$.

(3 p)

Lösningstips:

Med hjälp av den karaktäristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ bestämmer man motsvarande homogena ekvations lösningar

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Enligt superpositionsprincipen kan partikulärlösningar bestämmas genom att man tar hänsyn till en term från högerledet i taget.

Med ansats $y_{p_1} = Ae^{3x}$ får man ur ekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 6e^{3x}$$

en partikulärlösning

$$y_{p_1} = 3e^{3x}$$

Med ansats $y_{p_2} = D\cos x + E\sin x$ får man ur ekvationen

$$y'' - 3y' + 2y = 10\cos x$$

en partikulärlösning

$$y_{p_2} = \cos x - 3\sin x$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = y_h + y_{p_1} + y_{p_2} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3e^{3x} + \cos x - 3 \sin x$$

Med hänsyn till villkoren anpassas C_1 och C_2 vilket ger ett ekvationssystem

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -3 \\ C_1 + 2C_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = -2 \end{cases}$$

och den sökta lösningskurvan blir

$$y = -e^x - 2e^{2x} + 3e^{3x} + \cos x - 3 \sin x$$

2.

a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' = y - x$$

Lösningstips:

Ekvationen skrivs på normalform enligt $y' - y = -x$ och med hjälp av en integrerande faktor e^{-x} får man

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = e^{-x}x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(ye^{-x}) = -e^{-x}x$$

som efter ledvis integration ger den allmänna lösningen

$$y = x + 1 + Ce^x$$

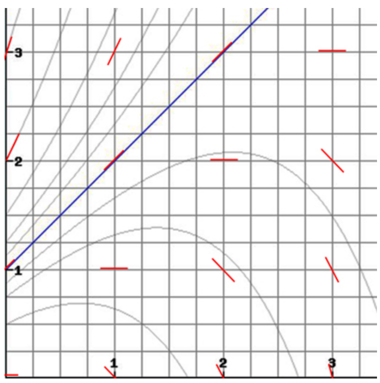
b) Skissa tillhörande riktningsfält för $0 \le x \le 3$ och $0 \le y \le 3$. Markera särskilt den lösningskurva som passerar punkten $(1, 2)$.

Lösningstips:

Med $C = 0$ får man lösningskurvan $y = x + 1$ (blå i bilden) som passerar punkten $(1, 2)$. Denna lösningskurva skissas först.

Riktningskoefficienter (k-värden) till lösningskurvors tangenter (röda i bilden) är till hjälp för att skissa andra lösningskurvor (grå i bilden). Dessa k-värden fås genom insättning av valda punkters koordinater (lämpligen heltalsvärden) i ekvationen $y' = y - x$.

I exempelvis punkten $(3, 2)$ får man $y' = 3 - 2 = -1$



(3 p)

3.

Bestäm kurvlängden för parameterkurvan nedan samt skissa kurvan.

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 2\sin t \\ y(t) = 2 - 2\cos t \end{cases} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

(3 p)

Lösningstips:

Längden av ett bågelement tas fram enligt

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt$$

För aktuell kurva gäller därmed

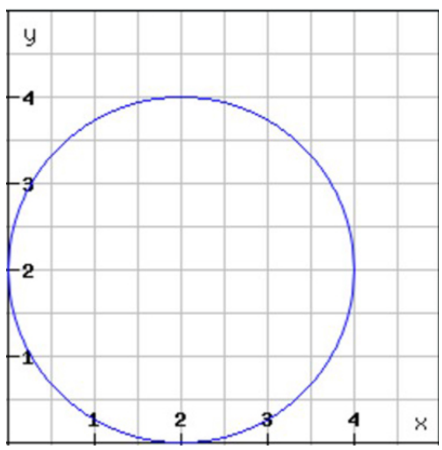
$$ds = \sqrt{(-2\cos t)^2 + (2\sin t)^2} = 2\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} dt = 2\, dt$$

Hela längden fås genom

$$\int_0^{2\pi} 2\, dt = [2t]_0^{2\pi} = 4\pi$$

Grafen skissas med hjälp av bekanta trigonometriska värden för $0 \le t \le 2\pi$.

t	(x, y)
0	$(2, 0)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 2)$
π	$(2, 4)$
osv	



4.

a) Bestäm fördelningsfunktionen till täthetsfunktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sin x \;, & x \in \left[\frac{\pi}{3}, \; \frac{2\pi}{3}\right] \\ 0 \;, & \text{annars} \end{cases}$$

Lösningstips:

Den primitiva funktionen

$$F(x) = -\cos x + C$$

anpassas med konstanten $C = \frac{1}{2}$ så att den för låga x-värden får värdet 0 och samtidigt för höga x -värden får värdet 1. Fördelningsfunktionen blir

$$F(x) = \begin{cases} 0 \;, & x \in \left]-\infty, \; \frac{\pi}{3}\right[\\ \frac{1}{2} - \cos x \;, & x \in \left[\frac{\pi}{3}, \; \frac{2\pi}{3}\right] \\ 1 \;, & x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \; \infty\right[\end{cases}$$

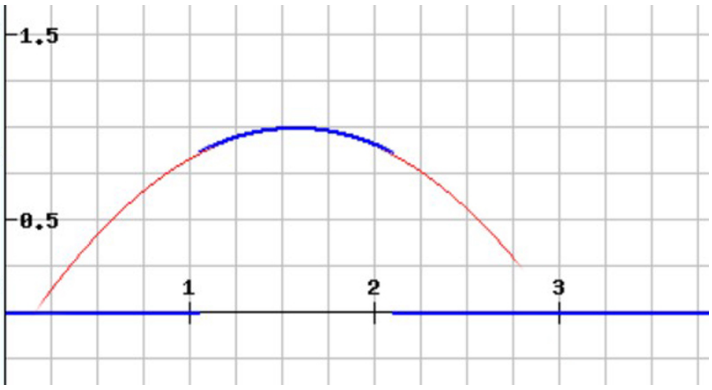
b) Bestäm täthetsfunktionens Taylor-polynom av grad två, i en omgivning till $x = \frac{\pi}{2}$ och skissa kurvan tillsammans med täthetsfunktionens kurva.

Lösningstips:

Taylors formel används. För $f(x) = \sin x$ får man i en omgivning till $x = \frac{\pi}{2}$

$$p(x) = \underbrace{1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2}}_{\text{polynom av grad två}} + r(x)$$

Täthetsfunktionens kurva (blått) och Taylor-polynomets kurva (rött) skissas. Som synes matchar de varandra väl inom intervallet $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \; \frac{2\pi}{3}\right]$ men inte alls utanför detta intervall:



(3 p)

5.

a) Visa med hjälp av en rotationskropp att ett klot med radien r har volymen $V = \frac{4\pi r^3}{3}$

Lösningstips:

Man utgår lämpligtvis från cirkelns ekvation för en cirkel med radien r

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Över- och underfunktion blir då

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$

som har skärningspunkter med x-axeln i $x = -r$ och $x = r$.

Den övre roteras runt x-axeln och skivformeln ger volymelementet

$$dV = \pi y^2 dx = \pi\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx = \pi(r^2 - x^2)dx$$

Hela volymen blir

$$V = \pi\int_{-r}^{r}(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

b) Visa med hjälp av en rotationsyta att mantelytan hos en rak cirkulär kon med höjden h och radien r har arean $M = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$

Lösningstips:

Man utgår lämpligtvis från den räta linjen $y = \frac{rx}{h}$ (med $k = \frac{r}{h}$) och låter den rotera runt x-axeln inom intervallet $x \in [0, h]$.

Ett areaelement likt ett band runt x-axeln blir

$$dA = 2\pi y ds = 2\pi y\underbrace{\sqrt{1 + (y')^2}dx}_{=ds} = \frac{2\pi rx}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx$$

Hela arena blir

$$A = \int_0^h \frac{2\pi rx}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\,dx = \underbrace{\frac{2\pi r}{h}\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}}_{\text{konstant}}\int_0^h x\,dx = \cdots = \pi r\sqrt{h^2 + r^2}$$

(3 p)

6.

Låt f vara kontinuerlig på intervallet I, låt a och x tillhöra I och låt

$$S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Rita en tydlig figur och visa – med stöd av derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler – att

$$S'(x) = f(x)$$

(3 p)

Lösningstips:

Uppgiften handlar om att bevisa Analysens huvudsats – se vidare i läroboken eller föreläsningsanteckningarna.

7.

Bestäm den enda lösningskurvan $y(x)$ som uppfyller

$$y(x) + \int_0^x y(t)dt = 2\cos x$$

(3 p)

Lösningstips:

Ledvis derivering – integralen med hjälp av Analysens huvudsats (se uppgift 6) – ger den linjära differentialekvationen

$$y'(x) + \frac{d}{dx}\int_0^x y(t)dt = -2\sin x \qquad \Leftrightarrow \qquad y'(x) + y(x) = -2\sin x$$

Ekvationen löses genom att man bestämmer y_h och y_p eller med hjälp av integrerande faktor och man får allmänna lösningen

$$y = Ce^{-x} - \sin x + \cos x$$

Insättning av $x = 0$ i den ursprungliga ekvationen (alla x -värden skall fungera och $x = 0$ ger enklast beräkning) nollställer integralen och man får ett begynnelsevillkor

$$y(0) + \underbrace{\int_0^0 y(t)dt}_{=0} = 2\cos 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y(0) = 2$$

Med hjälp av detta fastställer man $C = 1$ och enda lösningskurvan blir

$$y = e^{-x} - \sin x + \cos x$$