Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kursen VT2017

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23
Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel: Skrivdon, passare, kurvmall och linjal
Skrivtid: 2017-03-13, kl. 08:00–13:00
Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 2y' - 15y = 16e^{3x}$$

Lösningstips:

Den homogena ekvationen löses och med ansats $y = Ce^{rx}$ får man tillhörande karaktäristisk ekvation

$$r^2 + 2r - 15 = 0$$

som efter lösning och insättning ger

$$y_h = C_1e^{3x} + C_2e^{-5x}$$

Därmed duger inte $y = Ae^{3x}$ som ansats till y_p och vi väljer istället $y = ze^{3x}$ med z som en funktion av x. Derivering (produktderivator) och insättning ger efter förenkling

$$z''e^{3x} + 8z'e^{3x} = 16e^{3x}$$

Därmed bör z vara ett förstagradspolynom så att $8z'$ samtidigt blir 16 som återfinns i högerledet samt $z'' = 0$. Man väljer $z = 2x$ utan konstant då den inte tillför något nytt så att

$$y_p = 2xe^{3x}$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = y_h + y_p = C_1e^{-5x} + C_2e^{3x} + 2xe^{3x}$$

(3 p)

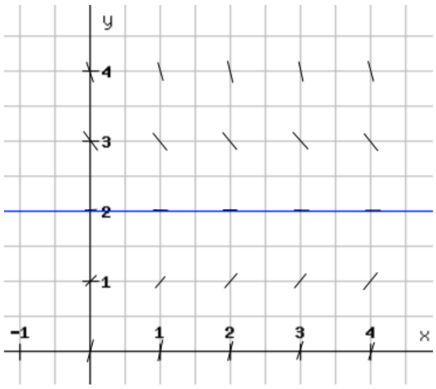
2.

a) Skissa ett riktningsfält inom området $0 \leq x \leq 4$ och $0 \leq y \leq 4$ till differentialekvationen

$$y' + y = 2$$

Lösningstips:

Ekvationen skrivs på formen $y' = 2 - y$ och derivatan beräknas i utvalda punkter för att sedan åskådliggöras med hjälp av korta tangenter till de sökta lösningskurvorna. Därmed anar man lösningskurvor och särskilt $y = 2$ syns tydligt – en rät linje som övriga lösningskurvor konvergerar mot då $x \to \infty$:



b) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y' + y = 2$$

Lösningstips:

Ekvationen är både separabel och linjär av första ordningen, dessutom med konstanta koefficienter så att alla tre lösningsmetoder som ingår i kursen fungerar och de ger alla lösningarna

$$y = 2 + Ce^{-x}$$

c) Bestäm den lösningskurva som uppfyller villkoret $y = 3$ då $x = 1$ och skissa den i riktningsfältet i a).

Lösningstips:

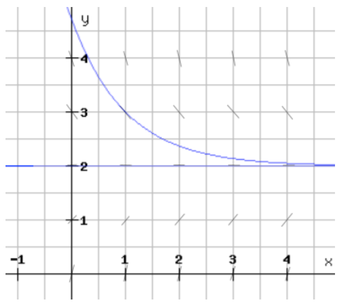
Insättning i allmänna lösningen $y = 2 + Ce^{-x}$ ger

$$3 = 2 + Ce^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = Ce^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad C = e$$

och lösningskurvan

$$y = 2 + ee^{-x}$$

är den sökta och passerar punkten $(1, 3)$ enligt skissen nedan. Den (liksom alla andra lösningskurvor) närmar sig $y = 2$ då $x \to \infty$. Kurvan skissa med hjälp av värdetabell:



(3 p)

3.

a) Bestäm Maclaurin-polynomet av grad tre till $f(x) = \tan x$

Lösningstips:

Succesiv derivering ger

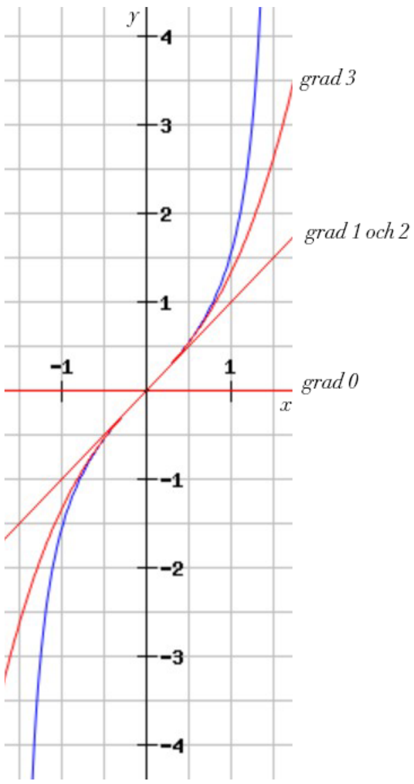
$$f(x) = \tan x \,, \qquad f'(0) = 0$$
$$f'(x) = 1 + \tan^2 x \,, \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = 2 \tan x \,(1 + \tan^2 x)\,, \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = \cdots = 2 + 8\tan^2 x + 6 \tan^4 x \qquad , f'''(0) = 2$$

Maclaurins formel ger nu $p_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$

b) Skissa i ett *gemensamt* koordinatsystem kurvan till $f(x) = \tan x$ och kurvor till motsvarande Maclaurin-polynom av grad 0, 1, 2 och 3 i en omgivning till $x = 0$.

Lösningstips:

Kurvor till Maclaurin-polynomen $p_0(x) = 0,\ p_1(x) = p_2(x) = x$ och $p_3(x) = \frac{x^3}{3} + x$ samt funktionen $f(x) = \tan x$ skissas så att man tydligt ser att $p_3(x)$ bättre approximerar $f(x) = \tan x$ än vad $p_2(x)$ gör (o.s.v.) i en omgivning till $x = 0$.



(3 p)

4.

Funktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

är en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X.

a) Visa att $f_X(x)$ uppfyller kraven för att vara en täthetsfunktion.

Lösningstips:

Definitionen av täthetsfunktion kräver att:

I) $f_X(x) \geq 0$

II) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = \cdots = 1$

och båda dessa krav är uppfyllda

b) Bestäm tillhörande fördelningsfunktion.

Lösningstips:

Fördelningsfunktionen $F_X(x) = -\frac{1}{x^2} + C$ har enligt definition uppfylla kraven:

I) $F_X(x) \to 1 \text{ då } x \to \infty$

II) $F_X(x) \to 0 \text{ då } x \to -\infty$

III) Vara växande

Detta kräver att $C = 1$ så att

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

c) Låt α vara sannolikheten att ett slumpmässigt valt $X < x_\alpha$ och visa att

$$\alpha \to 1 \text{ då } x_\alpha \to \infty$$

Lösning:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f(x)\,dx = \int_1^{x_\alpha} \frac{2}{x^3}\,dx = \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^{x_\alpha} = 1 - \frac{1}{(x_\alpha)^2} \to 1 \text{ då } x_\alpha \to \infty$$

5. Låt $t \in [0, 2\pi]$ och beräkna kurvlängden av parameterkurvan

$$\begin{cases} x = 2\sin t + 2\cos t \\ y = 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$$

Lösningstips:

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos t - 2\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = -2\sin t - 2\cos t$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$\sqrt{(2\cos t - 2\sin t)^2 + (-2\sin t - 2\cos t)^2}dt$$

$$= \cdots = \sqrt{8(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt = \sqrt{8}dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{8}dt = \cdots = 2\sqrt{8}\pi = 4\sqrt{2}\pi$$

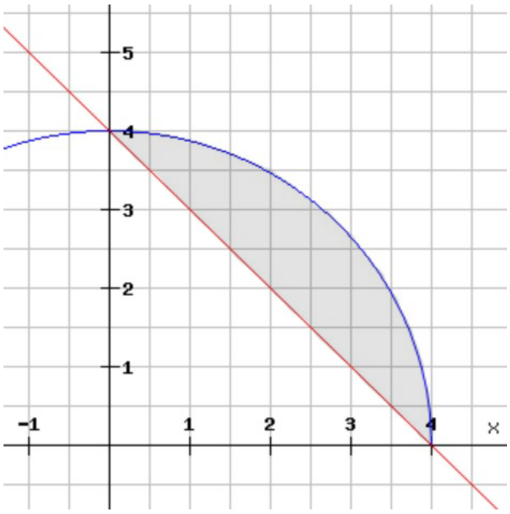
(3 p)

6. Området mellan $y = \sqrt{16 - x^2}$ och $y = 4 - x$ roterar ett varv runt x-axeln.

a) Beräkna rotationskroppen volym.

Lösningstips:

Aktuellt område identifieras:



Vid rotationen uppstår ett halvklot som har ett hålrum med formen av en kon.

$$V = V_{ytter} - V_{inner}$$

$$= \underbrace{\pi \int_0^4 \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 dx}_{\text{halvklot}} - \underbrace{\pi \int_0^4 (4 - x)^2\, dx}_{\text{kon}}$$

$$= \pi \int_0^4 (16 - x^2)\, dx - \pi \int_0^4 (16 - 8x + x^2)\, dx$$

$$= \ldots = \frac{64\pi}{3}$$

b) Beräkna rotationskroppens *begränsningsarea* – alltså den totala arean av alla ytor.

Lösningstips:

För konen (inre ytan) gäller $y = 4 - x$ och $y' = -1$ så att man med ytband runt x-axeln får:

$$A_{kon} = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{1 + (-1)^2}dx = 2\pi \int_0^4 x\sqrt{2}\, dx$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \int_0^4 x\, dx = \cdots = 16\sqrt{2}\pi$$

Notera att formeln för konens mantelyta $A = \frac{br}{2}$ med $r = 4$ och $b = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ ger samma svar!

För halvklotet (yttre ytan) gäller $y = \sqrt{16 - x^2}$ och $y' = \frac{-x}{\sqrt{16-x^2}}$ så att man med ytband runt x-axeln får:

$$A = 2\pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}\right)^2} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{16 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \sqrt{\frac{16 - x^2 + x^2}{16 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 \sqrt{16 - x^2} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dx$$

$$= 2\pi \int_0^4 4\, dx = \cdots = 32\pi$$

Notera att formeln för klotyta $A = \frac{4\pi r^3}{3}$ ger samma svar för halvklotet!

$$A = A_{kon} + A_{halvklot} = 16\sqrt{2}\pi + 32\pi$$

(3 p)

7.

a) Visa att

$$\frac{11}{18} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dx \leq \frac{3}{2}$$

Lösningstips:

Över- och undertrappa med *ett* delintervall ger summor som visar sig inte duga för att visa ovanstående.

Övertrappa med två delintervall (höjder i vänsterkant) ger översumman

$$\underbrace{\frac{1}{1+0^3}+\frac{1}{1+1^3}}_{\text{översumma}}=\frac{3}{2}$$

Undertrappa med *två* delintervall (höjder i högerkant) ger undersumman

$$\underbrace{\frac{1}{1+1^3}+\frac{1}{1+2^3}}_{undersumma}=\frac{11}{18}$$

Därmed gäller enligt sats att

$$\frac{11}{18} = \text{undersumman} \leq \int_0^2 \frac{1}{1+x^3}\,dy \leq \text{översumman} = \frac{3}{2}$$

b) Beräkna

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+5}\left(2+e^{-x^2}\right)dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+5}\left(2+e^{-x^2}\right)dx = \left|\begin{matrix}\text{Medelvärdessatsen}\\ \text{för integraler}\end{matrix}\right| = \cdots = 10$$

(3 p)