Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2017

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2017-06-08, kl. 14:00–19:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen

$$y'' + 4y' + 13y = 40\cos x$$

Lösningstips:

Motsvarande homogena ekvation (med noll i högerledet) löses och med ansatsen $y = Ce^{rx}$ får man tillhörande karaktäristisk ekvation

$$r^2 + 4r + 13 = 0$$

som efter lösning och insättning ger ”nolltillägget”

$$y_h = C_1e^{(-2+3i)x} + C_2e^{(-2-3i)x}$$

$$= C_1e^{-2x}e^{3ix} + C_2e^{-2x}e^{-3ix}$$

$$= C_1e^{-2x}(\cos 3x + i\sin 3x) + C_2e^{-2x}(\cos(-3x) + i\sin(-3x))$$

$$= e^{-2x}\big(C_1(\cos 3x + i\sin 3x) + C_2(\cos(3x) - i\sin(3x))\big)$$

$$= e^{-2x}\left(\left(\underbrace{C_1 + C_2}_{A}\right)\cos 3x + \left(\underbrace{i(C_1 - C_2)}_{B}\right)\sin 3x\right)$$

$$= e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x)$$

För att hitta en fungerande lösning till ekvationen väljer man exempelvis ansatsen

$$y_p = C\cos x + D\sin x$$

med tillhörande derivator

Insättning av y_p, y'_p och y''_p i ekvationen ger efter förenkling

$$(12C + 4D)\cos x + (12D - 4C)\sin x = 40\cos x$$

Lösning av motsvarande ekvationssystem

$$\begin{cases} 12C + 4D = 40 \\ 12D - 4C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \\ D = 1 \end{cases}$$

ger partikulärlösningen

$$y_p = 3\cos x + \sin x$$

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = y_h + y_p = e^{-2x}(A\cos 3x + B\sin 3x) + 3\cos x + \sin x$$

(3 p)

2.

Lös differentialekvationen nedan med hjälp av **tre** olika lösningsmetoder:

I) Genom separation av variabler

II) Med hjälp av integrerande faktor

III) Genom att finna den homogena ekvationens lösning + ekvationens partikulärlösningar

$$y' + y = 5$$

Lösningstips:

Metod I)

Variablerna separeras enligt

$$\frac{dy}{dx} + y = 5 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{5 - y} = dx$$

och integraler ledvis ger

$$-\ln|5 - y| = x + D$$

som sedan ger den allmänna lösningen genom att man löser ut y

$$y = 5 + Ce^{-x}$$

Metod II)

Termerna multipliceras med integrerande faktor e^x så att

$$e^x y' + e^x y = 5e^x$$

kan skrivas som derivatan av produkt enligt

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = 5e^x$$

och integral ger

$$e^x y = 5e^x + C$$

som sedan ger den allmänna lösningen

$$y = 5 + Ce^{-x}$$

Metod III)

Då ekvationen är linjär med konstanta koefficienter kan man finna den allmänna lösningen enligt

$$y = y_h + y_p$$

Motsvarande homogen ekvation

$$y' + y = 0$$

ger efter ansats $y_h = Ce^{rx}$ en karaktäristisk ekvation

$$r + 1 = 0$$

som sedan ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = Ce^{-x}$$

Då högerledet är av grad noll är $y_p = A$ en lämplig ansats för att hitta en lösning y_p för ekvationen. Insättning av $y_p = A$ och $y_p' = 0$ ger $y_p = 5$ som tillsammans med $y_h = Ce^{-x}$ ger den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = 5 + Ce^{-x}$$

(3 p)

3.

a) Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x^3}{x^2(1-\cos x)}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)\sin x^3}{x^2(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+O(x^3)-1\right)\left(x^3-O(x^9)\right)}{x^2\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+O(x^5)}{\frac{x^4}{2}+O(x^5)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+O(x)}{\frac{1}{2}+O(x)}=2$$

Även standardgränsvärde ger en smidig lösning...

a) Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+4}\left(3+\frac{\cos x}{x}\right)dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+4}\left(3+\frac{\cos x}{x}\right)dx=\left|\begin{array}{c}\text{Medelvärdessatsen}\\ \text{för integraler med}\\ a<\xi<a+5\end{array}\right|=f(\xi)\big((a+4)-a\big)$$

$$=\left|\begin{array}{c}\frac{\cos x}{x}\to 0 \text{ då } x\to\infty\\ \text{vilket medför att}\\ f(\xi)\to 3 \text{ då } x\to\infty\end{array}\right|=3\cdot 4=12$$

(3 p)

4.

Funktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \\ 1 - \dfrac{x}{8} & , \quad 4 \le x \le 8 \\ 0 & , \quad x > 8 \end{cases}$$

är en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X.

a) Beräkna $P(3 \le X \le 5)$

Lösningstips:

$$\alpha = \int_3^5 f_X(x)\,dx = \int_4^5 \left(1 - \frac{x}{8}\right) dx = \cdots = \frac{7}{16}$$

b) Beräkna skillnaden mellan medianen och väntevärdet.

Lösningstips:

Medianen $x_{0,5} = b$ fås ur:

$$\int_4^b \left(1 - \frac{x}{8}\right) dx = \cdots = 0.5$$

Detta ger en andragradsekvation med en intressant rot

$$b = x_{0,5} = 8 - \sqrt{8} \approx 5.17$$

Väntevärde:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_4^8 \left(x - \frac{x^2}{8}\right) dx = \cdots = \frac{16}{3} \approx 5.33$$

Differensen:

$$x_{0,5} - \mu = 8 - \sqrt{8} - \frac{16}{3} \approx -0.16$$

(3 p)

5. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det begränsade området i 1:a kvadranten mellan (I) enhetscirkeln, (II) $y = 0$ och (III) $y = \sqrt{3}x$ roterar ett varv runt x-axeln.

Lösningstips:

I första kvadranten beskrivs enhetscirkeln av funktionen $y = \sqrt{1 - x^2}$ som fås ur cirkelns ekvation $x^2 + y^2 = 1$.

Skärningspunkterna som bildar "hörnen" av området beräknas:

Skärningspunkt mellan $y = \sqrt{1 - x^2}$ och $y = \sqrt{3}x$ beräknas och är $x = \frac{1}{2}$

Skärningspunkt mellan $y = \sqrt{1 - x^2}$ och $y = 0$ beräknas och är $x = 1$

Skärningspunkt mellan $y = \sqrt{3}x$ och $y = 0$ är $x = 0$

Rotationskroppens volym fås genom

$$V = \pi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{3}x\right)^2 dx + \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 dx = \cdots = \frac{\pi}{3} \text{ volymenheter}$$

(3 p)

6.

a) Antag att f är kontinuerlig på I samt att x och $a \in I$.

Bevisa med hjälp av bl.a. derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler att

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Lösningstips:

Beviset av Analysens huvudsats finns under Sats 6.7 på sid 286 i läroboken samt i föreläsningsanteckningarna.

b) Förklara med en skiss och egna ord vad uttrycket ovan i praktiken berättar.

Lösningstips:

Se kommentarer om Analysens Huvudsats från föreläsningen. Satsen säger att marginalökningen av integralen $\int_a^x f(t)\,dt$ med avseende på den högra integrationsgränsen x är lika stor som funktionsvärdet $f(x)$.

(3 p)

7.

Visa med hjälp av en Riemann-summa att

$$\int_0^3 x^3 dx = \frac{81}{4}$$

Ledning: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösningstips:

Övertrappa med n delintervall för $f(x) = x^3$ ger en översumma med n stycken delareor (smala remsor).

Varje remsa har bredden $\Delta x = \frac{3}{n}$ och en högerkant i punkten $x_i = i \cdot \frac{3}{n}$ med index $i = 1, 2, 3 \ldots n$.

Varje remsa har då arean $f(x_i) \cdot \Delta x = x_i^2 \cdot \Delta x = \underbrace{\left(i \cdot \frac{3}{n}\right)^3}_{höjd} \cdot \frac{3}{n}$

Översumman blir då

$$\underbrace{\left(1 \cdot \frac{3}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n}}_{\text{area } 1} + \underbrace{\left(2 \cdot \frac{3}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n}}_{\text{area } 2} + \cdots + \underbrace{\left(n \cdot \frac{3}{n}\right)^3 \cdot \frac{3}{n}}_{\text{area } n}$$

$$= \frac{81}{n^4}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)$$

$$= \frac{81}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{81}{4} \cdot \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{n^4}$$

$$= \frac{81}{4} \cdot \frac{n^4 \overbrace{\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}^{\to 1 \text{ då } n \to \infty}}{n^4} \to \frac{81}{4} \text{ då } n \to \infty$$

(3 p)