Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2018

Examination:	TEN 1 inom kurs TNIU23			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2018-06-07, kl. 14:00–19:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + 4y' = 8x$$

som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 1$ och $y'(0) = -1$

Lösningstips:

Motsvarande homogena ekvation (med noll i högerledet) löses och med ansatsen $y = Ce^{rx}$ får man tillhörande karaktäristisk ekvation

$$r^2 + 4r = 0$$

som efter lösning och insättning ger ”nolltillägget”

$$y_h = C_1 + C_2 e^{-4x}$$

För att hitta en fungerande lösning till ekvationen väljer man exempelvis ansatsen

$$y'_p = Ax + B$$

med tillhörande derivata

$$y''_p = A$$

Insättning av y'_p och y''_p i ekvationen ger efter förenkling

$$A + 4Ax + 4B = 8x$$

med lösningen

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

så att

$$y'_p = 2x - \frac{1}{2}$$

med

$$y_p = x^2 - \frac{x}{2}$$

Utan konstant då en sådan redan finns hos y_h

Den allmänna lösningen blir därmed

$$y = y_h + y_p = C_1 + C_2 e^{-4x} + x^2 - \frac{x}{2}$$

med

$$y' = -4C_2 e^{-4x} + 2x - \frac{1}{2}$$

Villkoret $y'(0) = -1$ kräver att $C_2 = \frac{1}{8}$

Vidare kräver $y(0) = 1$ att $C_1 = \frac{7}{8}$ så att

$$y = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} e^{-4x} + x^2 - \frac{x}{2}$$

(3 p)

2.

Lös differentialekvationen

$$y' - y = 4$$

med hjälp av **tre** olika lösningsmetoder:

I) Genom separation av variabler

II) Med hjälp av integrerande faktor

III) Genom att finna den homogena ekvationens lösning + ekvationens partikulärlösningar

Lösningstips:

Metod I)

Variablerna separeras enligt

$$\frac{dy}{dx} - y = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{4+y} = dx$$

och integraler ledvis ger

$$\ln|4+y| = x + D$$

som sedan ger den allmänna lösningen genom att man löser ut y

$$y = Ce^{x} - 4$$

Metod II)

Termerna multipliceras med integrerande faktor e^{-x} så att

$$e^{-x}y' - e^{-x}y = 4e^{-x}$$

kan skrivas som derivatan av produkt enligt

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}y) = 4e^{-x}$$

och integral ger

$$e^{-x}y = -4e^{-x} + C$$

som sedan ger den allmänna lösningen

$$y = Ce^{x} - 4$$

Metod III)

Då ekvationen är linjär med konstanta koefficienter kan man finna den allmänna lösningen enligt

$$y = y_h + y_p$$

Motsvarande homogen ekvation till den ursprungliga är

$$y' - y = 0$$

och ger efter ansats $y_h = Ce^{rx}$ en karaktäristisk ekvation

$$r - 1 = 0$$

som sedan ger den homogena ekvationens lösning

$$y_h = Ce^{x}$$

Då högerledet är av grad noll är $y_p = A$ en lämplig ansats för att hitta en lösning y_p för ekvationen. Insättning av $y_p = A$ och $y_p{}' = 0$ ger $y_p = -4$ som tillsammans med $y_h = Ce^{x}$ ger den allmänna lösningen

$$y = y_h + y_p = Ce^{x} - 4$$

(3 p)

3. Beräkna följande gränsvärden

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x \ln(x^3+1)}{(1-\cos x^2)}$$

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x \ln(x^3+1)}{(1-\cos x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\big(3x - O(x^3)\big)\big(x^3 - O(x^6)\big)}{\left(1-\left(1-\frac{x^4}{2}+O(x^8)\right)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x^4 + O(x^6)}{\frac{x^4}{2}+O(x^8)} = 6$$

Även standardgränsvärde ger en smidig lösning...

b)

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+4}\big(\arctan x + e^{-x^2}\big)dx$$

Lösningstips:

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^{a+4}\big(\arctan x + e^{-x^2}\big)dx = \left|\begin{array}{c}\text{Medelvärdessatsen}\\ \text{för integraler med}\\ a \le \xi \le a+4\end{array}\right|$$

$$= f(\xi)\big((a+4)-a\big) = \left|\begin{array}{c}\arctan x + e^{-x^2} \to \frac{\pi}{2} \text{ då } x\to\infty\\ \text{vilket medför att}\\ f(\xi)\to\frac{\pi}{2} \text{ då } x\to\infty\end{array}\right|$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot 4 = 2\pi$$

(3 p)

4.

a) Funktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{5x} & \text{för } x < 0 \\ 3e^{-5x} & \text{för } x \geq 0 \end{cases}$$

är en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X.

Beräkna täthetsfunktionens median.

Lösningstips:

Eftersom att

$$\int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 2e^{5x}\,dx = \cdots = \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$$

måste medianen

$$x_{0,5} \geq 0$$

Integralen $\int_0^b f_X(x)\,dx = \int_0^b 3e^{-5x}\,dx \overset{\substack{\text{krav för} \\ \text{medianen}}}{=} \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ får man

$$-\frac{3e^{-5b}}{5} + \frac{3e^{0}}{5} = \frac{1}{10} \iff b = x_{0,5} = \frac{\ln 6 - \ln 5}{5} \approx 0{,}04$$

b) Hitta på en täthetsfunktion $f_X(x)$ som har *lika* median $x_{0,5}$ och förväntat värde (väntevärde) μ – motivera dessutom ditt svar.

Lösningstips:

Enklast är att skapa en täthetsfunktion (enligt definitionen av en sådan) som dessutom är symmetrisk kring sin median. Medianen sammanfaller då med väntevärdet.

(3 p)

5. Beräkna volymen av den kropp som uppstår då det *obegränsade* området i 1:a kvadranten mellan (I) x-axeln, (II) $y = \frac{4}{x}$ och (III) $y = \frac{x}{4}$ roterar ett varv runt x-axeln.

Lösningstips:

Skärningspunkterna som bildar "hörnen" av området beräknas:

Skärningspunkt mellan x-axeln och $y = \frac{x}{4}$ är origo.

Skärningspunkt mellan $y = \frac{x}{4}$ och $y = \frac{1}{x}$ är i första kvadranten $x = 4$

Skärningspunkt mellan x-axeln och $y = \frac{4}{x}$ saknas såklart men funktionskurvan närmar sig x-axeln då $x \to \infty$.

Rotationskroppens volym fås genom

$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx + \pi \int_4^\infty \left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = \cdots = \frac{4\pi}{3} + 4\pi = \frac{16\pi}{3} \text{ volymenheter}$$

(3 p)

6.

a) Analysen Huvudsats berättar att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Förklara med en skiss och egna ord vad uttrycket ovan i praktiken berättar.

Lösningstips:

Se kommentarer om Analysens Huvudsats från föreläsning 4. Satsen säger att marginalökningen av integralen $\int_a^x f(t)\,dt$ med avseende på den högra integrationsgränsen x är lika stor som funktionsvärdet $f(x)$.

b) Härled Insättningsformeln (för beräkning av bestämda integraler) ur Analysen Huvudsats.

Se anteckningar från föreläsning 4 då huvudsatsen tillämpades på två intervall, exempelvis $[a, x_1]$ och $[a, x_2]$. Insättningsformeln fick man genom att man integrerar uttrycken och sedan subtrahera dem med varandra.

(3 p)

7. Ange den enda funktionen som uppfyller

$$y(x) = x^2 - \int_0^x 2y(t)dt$$

Ledning: Att derivera ledvis med avseende på x ger värdefull information...

Lösningstips:

Ledvis derivering med avseende på x ger:

$$y'(x) = 2x - \frac{d}{dx}\int_0^x 2y(t)dt$$

Analysens huvudsats ger nu en första ordningens differentialekvation

$$y'(x) + 2y(x) = 2x$$

som kan lösas med hjälp av integrerande faktor e^{2x} enligt:

$$y'(x)e^{2x} + 2y(x)e^{2x} = 2xe^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}(y(x)e^{2x}) = 2xe^{2x}$$

Båda leden integreras (partiell integration i högerledet) och man får:

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{2x} = \int \underbrace{2x}_{\downarrow} \overbrace{e^{2x}}^{\uparrow} dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{2x} = xe^{2x} - \int e^{2x}\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x)e^{2x} = xe^{2x} - \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\Leftrightarrow \quad y(x) = Ce^{-2x} + x - \frac{1}{2}$$

Den ursprungliga ekvationen har ett begynnelsevillkor som gör att C kan bestämmas. Villkoret fås genom att man sätter in $x = 0$ i den ursprungliga ekvationen och nollställer integralen i högerledet så att ett villkor framträder:

$$y(0) = 0^2 - \int_0^0 2y(t)dt \quad \Leftrightarrow \quad y(0) = 0$$

Därmed är den enda lösningen av ekvationen den med $C = \frac{1}{2}$ så att

$$y(x) = \frac{e^{-2x}}{2} + x - \frac{1}{2}$$

(3 p)