

# Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

---

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsninganteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsninganteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

## Tentamen inom Envariabelanalys II

*Kompletterande tentamen 2 för kursen VT2018*

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23

Max: 21 p                      betyg 5:  $\geq 16$  p                      betyg 4:  $\geq 12$  p                      betyg 3:  $\geq 8$  p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1

Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar, tydligt angivna svar.

Hjälpmedel: Skrivdon, passare, kurvmall och linjal

Skrivtid: 2018-09-01, kl. 08:00–13:00

Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' - 2y' = 8 - 9e^{3x}$$

som uppfyller begynnelsevillkoren  $y'(0) = 17$  och  $y(0) = 6$ . (3 p)

*Lösningstips:*

Den homogena ekvationen  $y'' - 2y' = 0$  löses och man får  $y_h = A + Be^{2x}$  vilka inte återfinns i högerledet. Därmed fungerar ansatsen  $y_p' = Ce^{3x} + D$  med tillhörande derivata  $y_p''$  och insättning i ekvationen ger  $y_p' = -9e^{3x} - 4$ . Därmed duger partikulärlösningen  $y_p = -3e^{3x} - 4x$  (utan konstant).

Den allmänna lösningen blir därmed  $y = A + Be^{2x} - 3e^{3x} - 4x$  och efter derivering  $y' = 2Be^{2x} - 9e^{3x} - 4$

Med hänsyn till villkoren får man  $\begin{cases} 2B - 9 - 4 = 17 \\ A + B - 3 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -6 \\ B = 15 \end{cases}$

$$y = -6 + 15e^{2x} - 3e^{3x} - 4x$$

2.

a) Lös differentialekvationen

$$y' = -y^2$$

*Lösningstips:*

Differentialekvationen är separabel. Variablerna separeras enligt  $-\frac{dy}{y^2} = dx$  för  $y \neq 0$  (notera att  $y = 0$  studeras för sig) och båda leden integreras. Man får den allmänna lösningen  $y = \frac{1}{x+C}$  med  $x \neq -C$  samt  $y = 0$  som också direkt löser ekvationen

b) Lös differentialekvationen

$$y' + 2xy = 2x$$

*Lösningstips:*

Ekvationen kan också lösas genom att båda leden multipliceras med den integrerande faktor  $e^{x^2}$  och man får lösningen  $y = 1 + Ce^{-x^2}$ .

c) Visa med lämplig ansats att ekvationen  $y'' - 4y' + 5y = 0$  får en karakteristisk ekvation  $r^2 - 4r + 5 = 0$  och att den leder till den allmänna lösningen

$$y = e^{2x}(A \sin x + B \cos x)$$

*Lösningstips:*

Insättning av  $y = Ce^{rx}$  med tillhörande derivator ger efter faktorisering ekvationen  $r^2 - 4r + 5 = 0$  med lösningarna  $r = 2 \pm i$ . Därmed gäller att  $y = Ce^{(2+i)x} + De^{(2-i)x}$  som efter omskrivning med bl.a. Eulers formel ger  $y = e^{2x}((C + D) \cos x + i(C - D) \sin x)$  som förenklas till  $y = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$

(3 p)

3. Låt  $f_X(x)$  vara täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{6e^{2x}}{7} & x < 0 \\ \frac{8e^{-2x}}{7} & x \geq 0 \end{cases}$$

a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?

*Svar:*  $f_X(x) \geq 0$  och  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

b) Bestäm fördelningsfunktionen.

*Svar:*  $F_X(x) = \begin{cases} \frac{3e^{2x}}{7} & x < 0 \\ 1 - \frac{4e^{-2x}}{7} & x \geq 0 \end{cases}$

c) Beräkna medianen.

*Svar:*  $x_{0.5} = \frac{\ln 8 - \ln 7}{2}$

(3 p)

4.

- a) Bestäm  $a$  så att gränsvärdet existerar ändligt och beräkna sedan gränsvärdet:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax) - 2x + \arctan(ax)}{x^2}$$

*Lösningstips:*

Maclaurinutveckling ger

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ax) - 2x + \arctan(ax)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \frac{a^2x^2}{2} + \frac{a^3x^3}{3} - 2x + ax - \frac{a^3x^3}{3} + O(x^4)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2a - 2)x - \frac{a^2x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} \end{aligned}$$

Ändligt gränsvärde endast om  $a = 1$  vilket ger gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + O(x^4)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2} + O(x^2)}{1} = -\frac{1}{2}$$

- b)

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+5} \left( 3 + \frac{1}{e^{x^2}} \right) dx$$

*Lösningstips:*

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+5} \left( 3 + \frac{1}{e^{x^2}} \right) dx &= \left| \begin{array}{l} \text{Medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler med} \\ a \leq \xi \leq a + 5 \end{array} \right| = f(\xi)((a + 5) - a) \\ &= \left| \begin{array}{l} 3 + e^{-x^2} \rightarrow 3 \text{ då } x \rightarrow \infty \\ \text{vilket medför att} \\ f(\xi) \rightarrow 3 \text{ då } x \rightarrow \infty \end{array} \right| = 3 \cdot 5 = 15 \end{aligned}$$

(3 p)

5. Cirkelns ekvation med centrum i origo är

$$x^2 + y^2 = r^2$$

- a) Visa med hjälp av en rotations kropp att klotets volym ges av

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

*Lösningstips:*

Cirkelns ekvation  $r^2 = x^2 + y^2$  ger den övre kurvan  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  som får rotera runt  $x$ -axeln:

$$dV = \pi y^2 dx = \pi(r^2 - x^2) dx$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi [r^3 - rx^2]_{-r}^r \\ &= \dots = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

- b) Visa med hjälp av en rotations kropp att arean av klotets yta ges av

$$V = 4\pi r^2$$

*Lösningstips:*

Cirkelns ekvation  $r^2 = x^2 + y^2$  ger den övre kurvan  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  som får rotera runt  $x$ -axeln:

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \dots = 2\pi \int_{-r}^r r dx = \dots = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

6.

- a) Analysen Huvudsats berättar att

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Förklara med en skiss och egna ord vad uttrycket ovan i praktiken berättar.

*Lösningstips:*

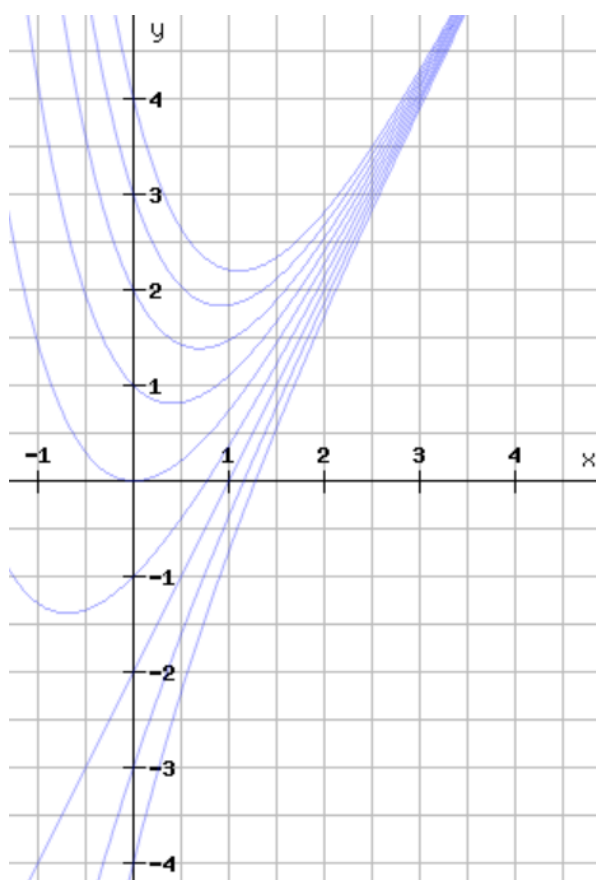
Se kommentarer om Analysens Huvudsats från föreläsning 4. Satsen säger att marginalökningen av integralen  $\int_a^x f(t) dt$  med avseende på den högra integrationsgränsen  $x$  är lika stor som funktionsvärdet  $f(x)$ .

- b) Härled Insättningsformeln (för beräkning av bestämda integraler) ur Analysen Huvudsats.

Se anteckningar från föreläsning 4 då huvudsatsen tillämpades på två intervall  $[a, x_1]$  och  $[b, x_2]$ . Insättningsformeln fick man genom att man integrerar uttrycken och sedan subtrahera dem med varandra.

(3 p)

7. Nedan finns delar av ett riktningsfält till en *linjär* differentialekvation av *första ordningen* med *konstanta koefficienter*. Nio av oändligt många lösningskurvor är skissade:



- a) Ange utifrån bilden ovan en tänkbar partikulärlösning till ekvationen och motivera ditt svar.

*Lösningstips:*

Denna typ av ekvationer har alltid lösningar av typen  $y = y_p + y_h$  med funktionen  $y_p$  som en av oändligt många lösningar av ekvationen och funktionen  $y_h$  är en term av typen  $y_h = Ce^{rx}$  som löser motsvarande homogena ekvation (med noll i högerledet). Samma konstanter  $r$  för alla lösningskurvorna men olika konstanter  $C$ .

Som synes finns en rät linje i riktningsfältet och därmed gäller att

$$y = Ax + B + Ce^{rx}$$

Med  $C = 0$  fås just denna lösningskurva (den räta linjen) som har ekvationen  $y = 2x - 2$ . Alltså har ekvationen partikulärlösningen

$$y_p = 2x - 2$$

- b) Hitta på en differentialekvation som har en allmän lösning i överensstämmelse med bilden – motivera dit svar med både resonemang och beräkningar utifrån riktningsfältet.

*Lösningstips:*

Vi vet efter a) att  $y = 2x - 2 + Ce^{rx}$

Den stationära punkten  $(0, 0)$  för en av lösningskurvorna ger med  $x = 0$  och  $y = 0$  att  $C = 2$  för just denna lösningskurva.

För samma lösningskurva vet vi att  $y' = 2 + Cre^{rx}$  med  $x = 0$ ,  $y' = 0$  och  $C = 2$  får man  $r = -1$  som gäller för alla lösningskurvor. Därmed får man den allmänna lösningen

$$y = y_p + y_h = 2x - 2 + Ce^{-x}$$