Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU23

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
Peter.holgersson@liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Ordinarie tentamen för kursen VT2019

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23
Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare
Skrivtid: 2019-03-18, kl. 08:00–13:00

---

1. Lös den linjära differentialekvationen

$$y' - 3y = 6$$

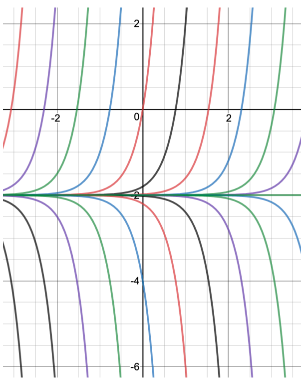
a) …med hjälp av en valfri metod.

b) …med hjälp av en annan metod.

Ledning: Med hjälp av integrerande faktor e^{-3x} eller genom att separera variablerna får man den allmänna lösningen $y = Ce^{3x} - 2$.

c) Skissa ett riktningsfält som beskriver lösningskurvorna.

Ledning: Värdetabell för $\frac{dy}{dx} = 3y + 6$ ger derivatan för olika punkter och fältet skissas exempelvis enligt nedan med en synlig partikulärlösning $y = -2$:



(3 p)

2. Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen

$$y'' + 3y' + 2y = 12e^x + 10\cos x$$

som i $x = 0$ tangerar linjen $y = 4x + 2$.

(3 p)

Lösningstips:

Den homogena ekvationen löses med ansatsen $y = Ae^{rx}$ och tillhörande derivator. Man får efter faktorisering den karaktäristiska ekvationen $r^2 + 3r + 2 = 0$ som ger:

$$y_h = A_1 e^{-2x} + A_2 e^{-x}$$

Ansatsen

$$y = Be^x + C\sin x + D\cos x$$

$$y' = Be^x + C\cos x - D\sin x$$

$$y'' = Be^x - C\sin x - D\cos x$$

baserad på högerledets utseende fungerar för att finna en partikulärlösning. Ett ekvationssystem ger B, C och D så att:

$$y_p = 2e^x + 3\sin x + \cos x$$

Den allmänna lösningen blir ”den enskilda partikulärlösningen y_p” tillsammans med ”tillägget y_h” så att alla tänkbara lösningskurvor finns samlade:

$$y = y_p + y_h = 2e^x + 3\sin x + \cos x + A_1 e^{-2x} + A_2 e^{-x}$$

med derivatan

$$y' = 2e^x + 3\cos x - \sin x - 2A_1 e^{-2x} - A_2 e^{-x}$$

Med hänsyn taget till villkoren $y' = 4$ för $x = 0$ och $y = 2$ för $x = 0$ får man efter lösning av ekvationssystem lösningskurvan

$$y = 2e^x + 3\sin x + \cos x + 2e^{-2x} - 3e^{-x}$$

3. En kontinuerlig stokastisk variabel X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2} & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & , \quad \text{övriga } x \end{cases}$$

a) *Bestäm fördelningsfunktionen.*

Lösningstips:

Den primitiva funktionen med anpassad konstant för att uppfylla kraven för en fördelningsfunktion blir

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos x & , \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 1 & , \quad x > \pi \end{cases}$$

b) Beräkna den övre kvartilen.

Lösningstips:

Med hjälp av den bestämda integralen

$$\int_0^{x_{0,75}} \frac{\sin x}{2}\, dx = \cdots = 0{,}75 \text{ (krav)}$$

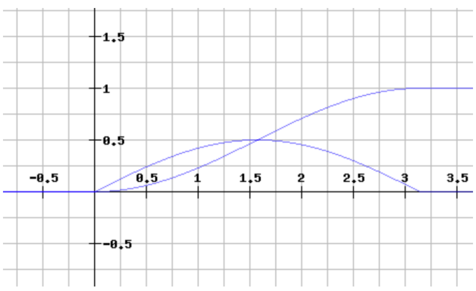
eller direkt ur fördelningsfunktionen

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x = 0{,}75$$

får man $x_{0.75} = \arccos(-0{,}5) = \frac{2\pi}{3} \approx 2{,}09$

c) Skissa täthetsfunktionen och fördelningsfunktionen i samma koordinatsystem.

Svar:



(3 p)

4.

a) Bestäm de tre polynomfunktionerna

$$p_0(x) = A$$

$$p_1(x) = A + Bx$$

$$p_2(x) = A + Bx + Cx^2$$

vilka så bra som möjligt approximerar funktionen $f(x) = \ln(1 + x)$ i en omgivning till $x = 0$. Skissa därefter de tre polynomfunktionerna i ett *gemensamt* koordinatsystem tillsammans med $f(x)$.

Lösningstips:

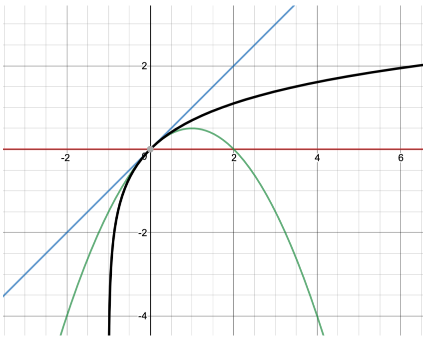
Exempelvis Maclaurins formel ger de approximerande polynomen

$$p_0(x) = 0$$

$$p_1(x) = x$$

$$p_2(x) = x - \frac{x^2}{2}$$

som alla är de bästa i sitt slag för approximationen av $f(x) = \ln(1 + x)$ i en omgivning till just $x = 0$. De tre polynomens kurvor skissas tillsammans med $f(x)$:



b) Bestäm konstanten a så att gränsvärde existerar ändligt för

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + ax) - 12x + 2\sin(ax)}{x^2}$$

och beräkna därefter gränsvärdet.

Lösningstips:

Maclaurinutveckling ger

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)-12x+2\sin(ax)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\frac{(ax)^2}{2}-12x+2ax+\mathcal{O}(x^3)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(3a-12)x-\frac{a^2}{2}x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2}$$

som bara har ändligt gränsvärde för $a=4$ så att täljare och nämnare får samma lägsta grad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-8x^2+\mathcal{O}(x^3)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-8+\mathcal{O}(x)}{1}=-8$$

(3 p)

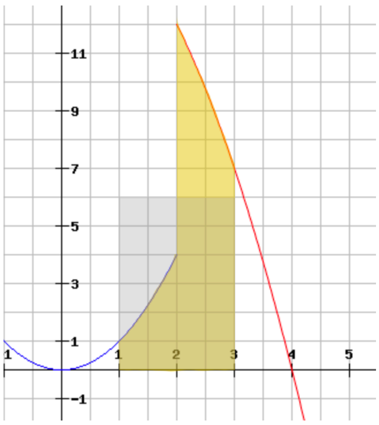
5. Låt

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & , \quad x<2\\ 16-x^2 & , \quad x\geq 2\end{cases}$$

och förklara varför *medelvärdessatsen för integraler* inte gäller för diskontinuerliga funktioner såsom denna.

Lösningstips:

Exempelvis integralen $\int_1^3 f(x)=\cdots=12$ (gulmarkerad) har samma "area" som den grå rektangeln med bredden 2 och höjden 6:



Dock saknas lämpligt $f(\xi)=6$ (lagom y-värde) hos funktionen inom detta intervall för att uppfylla $f(\xi)(b-a)=6(3-1)=12$. Medelvärdessatsen gäller (som väntat) inte i detta fall p.g.a. diskontinuitet.

(3 p)

6. Låt ett område begränsas av $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}$, $x = 4$, $x = 5$ och x-axeln.

a) Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området roterar runt x-axeln.

Lösningstips:

Rotationskroppens volym fås av integralen

$$V = \int_4^5 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)^2 dx = \pi \int_4^5 \frac{1}{x^2-9} dx$$

som löses med hjälp av partialbråksuppdelning till

$$\frac{\pi}{6} \int_4^5 \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) dx$$

och man får svaret $V = \frac{\pi}{6} \ln \frac{7}{4} \approx 0{,}293$ volymenheter

b) Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då området roterar runt y-axeln.

Lösningstips:

Rotationskroppens volym fås av integralen

$$\pi \int_4^5 2x \frac{1}{\sqrt{x^2-9}} dx$$

som exempelvis kan lösas med hjälp av substitutionen

$$\left| \begin{matrix} u = x^2 - 9 \\ \frac{du}{dx} = 2x \\ du = 2x\,dx \end{matrix} \right|$$

och man får då en integral med nya gränser:

$$\pi \int_7^{16} \frac{1}{\sqrt{u}} dx = \pi \left[2\sqrt{x}\right]_7^{16} = \cdots = \pi\left(8 - 2\sqrt{7}\right) \approx 8{,}51 \text{ volymenheter}$$

(3 p)

7. Beräkna

$$\frac{d}{dx}\int_3^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

med hjälp av *derivatans definition* och *medelvärdessatsen för integraler*.

Lösningstips:

Man låter $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ och följer samma steg som vid härledning av *analysens huvudsats* (se föreläsning 4 och sid 286 i läroboken). Det sökta svaret – som anger marginalökningen av integralens värde då man justerar den högra integrationsgränsen – blir $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.