Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys II

Kompletterande tentamen 1 för kursen VT2019

Examination: TEN 1 inom kurs TNIU23
Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p
Bonus: 0-2 p grundad på KTR1
Lösningar: Fullständiga, tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar.
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, gradskiva, passare
Skrivtid: 2019-06-12, kl. 14:00–19:00

---

1. Bestäm den lösningskurva till differentialekvationen

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

som tangerar linjen $y = 24x + 5$ i punkten $x = 0$.

Lösningstips

Som synes är ekvationen homogen och dess allmänna lösning fås exempelvis genom ansats $y = Ce^{rx}$ med tillhörande derivator. Faktorisering ger sedan karaktäristisk ekvation med lösningarna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$ som ger den allmänna lösningen

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$$

Villkoren $y(0) = 5$ och $y'(0) = 24$ ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 5 \\ 2C_1 + 3C_2 = 24 \end{cases}$$

som efter lösning ger den enskilda lösningskurvan

$$y = -9e^{2x} + 14e^{3x}$$

(3 p)

2.

a) Vilka två egenskaper kännetecknar en täthetsfunktion?

Svar

En täthetsfunktion $f_X(x)$ antar aldrig negativa värden – alltså $f_X(x) \geq 0$. Dessutom gäller att då täthetsfunktionen integreras över hela sin definitionsmängd blir alltid svaret 1 = 100%.

b) Bestäm konstanten c så att

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{x+1}} & \text{för } -1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{för övriga } x \end{cases}$$

blir en täthetsfunktion för den stokastiska variabeln X.

Ledning

Den generaliserade integralen $\int_{-1}^{3} \frac{c}{\sqrt{x+1}} dx$ löses med hjälp av gränsvärde och man får svaret $4c$ och enligt definitionen för täthetsfunktion gäller att $4c = 1$ så att $c = \frac{1}{4}$.

c) Bestäm $P(X > 0)$, alltså sannolikheten att den stokastiska variabeln X antar ett positivt värde.

Ledning

$P(X > 0) = \int_{0}^{3} \frac{1}{4\sqrt{x+1}} dx = \cdots = 0{,}5$

(3 p)

3. Visa att med hjälp av lämplig översumma och undersumma att

$$2 < \int_0^2 1{,}2^x dx < 3$$

Ledning

Motsvarande undersumma med två lika breda staplar har värdet 2,2 och motsvarande översumma över två lika breda delintervall har värdet 2,64. Alltså gäller för integralen att $2{,}2 < \int_0^2 1{,}2^x dx < 2{,}64$ och därmed är olikheten uppfylld.

(3 p)

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppkommer då ”*det begränsade området* mellan den räta linjen $y = 5x - 5$, kurvan $y = \sqrt{1 - x^2}$ och y-axeln” roterar ett varv runt y-axeln.

Ledning

Den övre delen av rotationskroppen bildar ett halvklot med delvolymen $V_{ö} = \frac{2\pi}{3}$ och kan exempelvis beräknas med liggande skivor längs y-axeln.

Den nedre delen av rotationskroppen bildar en kon med volymen $V_n = \frac{5\pi}{3}$ och kan exempelvis beräknas med liggande skivor längs y-axeln. Därmed blir den totala volymen $V = \frac{7\pi}{3}$.

(3 p)

5. Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x \sin x^3}$$

Ledning

Maclaurinutveckling eller ”förlängning med $(1 + \cos x)^2$ följt av studie med hjälp av standardgränsvärden” ger svaret $\frac{1}{4}$.

b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} e^{t^2} dt$$

Ledning

Kriterier för *medelvärdessatsen för integraler* är uppfyllda och satsen ger

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_x^{2x} e^{t^2} dt = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} f(\xi)\,(2x - x) = \cdots = \left| \begin{matrix} \text{Instängning} \\ 0 \le \xi \le x \end{matrix} \right| = \cdots = 1$$

(3 p)

6. Analysens huvudsats

a) Teckna satsen och förklara med egna ord vad satsen säger.

Ledning

Sats 6.7 i läroboken tecknas (beviset behövs ej). Satsens innebörd förklaras exempelvis på samma sätt som under föreläsning 4.

b) Härled insättningsformeln genom att utgå från analysens huvudsats.

Ledning

Se bevis av sats 6.8 i läroboken samt anteckningar från föreläsning 4.

(3 p)

7. Bestäm den enda lösningen till differentialekvationen

$$(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2 \arctan x$$

som uppfyller $y(0) = 1$.

Ledning

Detta är uppgift 8.13 i övningshäftet. Ekvationen skrivs på normalform.

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\, y = (1+x^2) \arctan x$$

Ekvationen förenklas sedan med hjälp av den integrerande faktor $\frac{1}{1+x^2}$ och man får

$$\frac{y'}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} y = \arctan x$$

vars vänsterled (som vanligt med hjälp av integrerande faktor) är en önskad produktderivata enligt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2} y\right) = \arctan x$$

Integration av båda leden (partiell integration med en etta i högerledet) ger

$$\frac{y}{1+x^2} = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

och med hänsyn till villkoret $y(0) = 1$ får man $C = 1$ så att

$$y = (1+x^2)\left(x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 1\right)$$

(3 p)