

# Ledtrådar till lektionsuppgifter

---

## *Allmänna råd vid lösning av lektionsuppgifter:*

- Försök inledningsvis att lösa uppgiften på egen hand, genom att omsätta innehållet i den tillhörande föreläsningen samt innehållet i läroboken.
- I andra hand försök att lösa uppgiften med hjälp av inledande ledtrådar nedan.
- I tredje hand försök att lösa uppgiften i dialog med en kamrat.
- I fjärde hand försök att lösa uppgiften med annan hjälp, t.ex. läraren eller andra studenter.

## *Funktioner och dess grafer*

- L2.1 Tillåtna  $x$ -värden? Erhållna  $y$ -värden?
- L2.5 Funktionen skrivs om, tre olika delfunktioner inom olika intervall, grafens tre delar ritas.
- L2.8 Tag om möjligt fram inversen – lyckas detta så finns inversen
- L2.9 Visa att funktionerna inte är injektiva – alltså att olika  $x$ -värden kan ge samma  $y$ -värde.
- L2.10 a) Om värdemängden är svår att finnas studerar man inversens definitionsmängd.  
b) Kvadratkomplettera under rottecknet för att enbart ha  $x$  i en term. Vad kan en kvadratrots anta som lägsta värde och finns det  $x$ -värde(n) ger just detta funktionsvärde? Vilket  $x$ -värde ger störst värde under rottecknet och vad blir då funktionsvärdet?
- L2.12 Kom ihåg att den inre funktionens definitionsmängd inte får glömmas då den sammansatta funktionen förenklats samt att den inre funktionens värdemängd måste rymmas i den yttre funktionens värdemängd.

Tag fram logaritmlag 2.3-2.6 med hjälp av bland annat definition 2.2 (se föreläsningen)

- L2.14 Tillämpa logaritmlagarna från sid 77-78
- L2.21 a) b) Tillämpa logaritmlagarna från sid 77-78  
c) Substitution  $t = e^x$       d)  $t = 3^{\frac{x}{2}}$       f) Substitution  $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = t^2$   
e) Eftersom att naturliga logaritmen är strängt växande duger det att studera en olikhet med enbart polynomen. Denna olikhet löses med hjälp av teckenstudium och glöm ej den ordinarie definitionsmängden.

- Ö3.27 Förenkla med hjälp av logaritmlagarna från sid 77-78
- Ö3.28 Multiplicera med nämnaren och använd logaritmlag. Notera att den ursprungliga ekvationen berättar vilka  $x$ -värden som måste undantas.
- Ö3.31 a) Använd logaritmlag. Notera att den ursprungliga ekvationen berättar vilka  $x$ -värden som måste undantas.  
b) Substitution.
- L2.67 Funktionen skrivs om, utan absolutbelopp, i tre separata intervall. Funktionen visar sig vara injektiv och dess invers kan bestämmas – tre delfunktioner inom tre separata intervall.
- L2.69 Glöm inte definitionsmängd grundad på de båda funktionernas påverkan av varandra.
- L2.70 a) Logaritmlag används och kom ihåg att den ursprungliga ekvationen avgör vilka  $x$ -värden som måste undantas.  
b) c) Substitution  
d) Logaritmlag används och erhållen polynomlikhet kan istället lösas, tack vare att naturliga logaritmen är strängt växande. Kom ihåg att den ursprungliga ekvationen avgör vilka  $x$ -värden som måste undantas.
- Ö3.1 Alla funktioner – både de som har resp. saknar invers – kan bara ha ett  $y$ -värde för varje tillåtet  $x$ -värde. Att sedan vissa av funktionerna i uppgiften har respektive saknar invers berör inte frågan.
- Ö3.3 Tillåtna  $x$ -värden? Erhållna  $y$ -värden?
- Ö3.8ab Kvadratkomplettera funktionerna så att värdemängden enklare kan bestämmas.
- Ö3.9 acegi Fundera över hur insatta  $x$ -värden påverkas och sedan hur erhållna  $y$ -värden påverkas.
- Ö3.13 Lös ut  $x$  och därefter variabelskifte. Om någon funktion uppenbart saknar invers räcker det med en kommentar som visar detta.
- Ö3.20 Insättning av ena funktionen i den andra och tvärtom.

### *Trigonometriska funktioner*

Förklara samtliga fetstilta begrepp i kap. 2.4 samt ge egna exempel

Behärska grundekvationerna 2.42 och 2.43

- L2.30 a) Enhetscirkeln  
b) Trigettan, faktorisera och enhetscirkeln

- L2.31 a)  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$   
 b) Faktorisera och enhetscirkeln
- L2.32 Trigaretan och enhetscirkeln
- L2.33 a) Sinus för dubbla vinkeln, faktorisera.  
 b) Cosinus för dubbla vinkeln, "trigaretan", faktorisera.  
 c) Fundera över symmetri i enhetscirkeln – spegling i höjded.  
 d) Tangens för dubbla vinkeln, faktorisera, undvik förbjudna vinklar
- L2.34 a) Subtraktionssatser för cosinus och sinus  
 b) Cosinus för dubbla vinkeln (två av tre olika formler)
- L2.38 Ersätt vänsterledet med hjälp av additionssatser resp. subtraktionssatser.
- L2.39 Ersätt täljaren i vänsterledet med "trigaretan".
- L2.43 Bestäm radien  $r$  samt vinkeln  $v$  (jfr. belopp resp. argument vid komplexa tal).
- L2.44 Enhetscirkeln.
- Ö3.40 Speglingar i enhetscirkeln.
- Ö3.44 Beräkna höjden till en början.

### *Arcusfunktioner, komplexa exponentialfunktioner*

Förklara samtliga fetstilta begrepp i kap. 2.5 och 2.6 samt ge egna exempel

- Ö3.46 Se kurshäftet från TNIU19
- Ö3.47 Se kurshäftet från TNIU19
- Ö3.48 Rita rätvinklig triangel med anpassade kateter. Skala samtliga sidors längd så att hypotenusan får längden 1 och triangeln blir nu en kär bekant.
- Ö3.50 Rita triangel och fundera över vad funktionerna returnerar.
- Ö3.51 Hjälptriangel och/eller "trigaretan"
- Ö3.52 Inom vilka intervall är funktionerna varandras inverser?
- L2.52 Notera att di dessa funktioner är inverser till andra kan enbart ett svar finnas per uppgift – dessa finner man med hjälp av enhetscirkeln.
- L2.53 a) Hjälptriangel för  $\arcsin \frac{1}{3}$  och sedan sinus för dubbla vinkeln.

b) Tangens' additionssats på sid 106 med  $u = \arctan 2$  och  $v = \arctan 3$ .

c) Arctangens för ovanstående

L2.54 a) Likheten ger att samma vinkel beskrivs av båda leden. Låt ex.  $a = 2$ ,  $b = 1$  och  $c = 2$  hos en rätvinklig hjälptriangel, halvera sidorna och få en bekant triangel. Variabeln  $x$  blir alltså längden av den motstående kateteten i den lilla triangeln.

b) Likheten ger att samma vinkel beskrivs av båda leden. Låt ex.  $a = x^2$ ,  $b = x$  och  $c = 1$  hos en rätvinklig hjälptriangel. Variabeln  $x$  blir alltså längden av den närliggande kateteten i triangeln och bestäms med hjälp av Pythagoras sats som ger en fjärdegradsekvation som man löser med substitutionen  $t = x^2$ .

L2.58 a) Låt  $\cos^3 x = (\cos x)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \dots$

b) Låt  $\sin^3 x = (\sin x)^3 = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \dots$

L2.76 a) Samma metod som ovan

b) Cosinus för dubbla vinkeln – därefter samma metod som ovan.

L2.60 Bestäm belopp och argument.

L2.61 Hämta "trigvärden" för realdel och imaginärdel i enhetscirkeln.

L2.65 De Moivres formel

L2.55 Additionssatsen för cosinus med  $u = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}$  och  $v = \arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}$  och ersätt vissa funktioner med hjälp av "trigettan" så att funktion och tillhörande invers möts.

L2.78 a) Additionssatsen för sinus med  $u = \arctan 5$  och  $v = \arctan \frac{3}{2}$ . Skapa sedan två hjälptriangler och bestäm sökta "trigvärden" med hjälp av dessa.

b) Bestäm arcsin för ovanstående

L2.79 a) Likheten ger att samma vinkel beskrivs av båda leden. Låt ex.  $a = 2$ ,  $b = 3x$  och  $c = 1$  hos en rätvinklig hjälptriangel. Variabeln  $x$  blir alltså halva längden av den motstående kateteten i triangeln och bestäms med hjälp av Pythagoras.

b) Sinus i båda leden och låt  $\sin(2 \arccos x) = \sin 2u = 2 \sin u \cos u = 2 \sin(\arccos x) \cos(\arccos x) \dots$

L2.80 a) Den inre funktionens värdemängd bestäms och den innehåller värden som parvis ger samma sinusvärde.

b) Den inre funktionens definitionsmängd måste stympas så att den inre funktionens värdemängd inte innehåller negativa värden. Inom erhållet intervall är funktionen strängt växande och invers kan bestämmas.

## Gränsvärden

- L3.1 Ledtråd behövs ej
- L3.2 a) Förkorta  
b) Bryt ut det dominerande och förkorta  
c) Bryt ut det dominerande och förkorta  
d) Utvecklas enligt binomialteoremet och förkorta
- L3.7 a) Faktorisera och förkorta  
b) Bryt ut det dominerande, förkorta och fundera över vilken faktor som är starkast  
c) Faktorisera nämnaren, liknämningt, förkorta  
d) Logaritmlagar, bryt ut och förkorta
- Ö4.1 Ledtråd behövs
- Ö4.2 Ledtråd behövs
- Ö4.3 a-c) Bryt ut det dominerande och förkorta  
d) Faktorisera och förkorta
- Ö4.5 a) Bryt ut  $|x|$  ur täljaren  
b) Bryt ut  $|x|$  ur nämnaren  
c) Bryt ut  $x$  eller  $\sqrt{x}$  två varv
- L3.8 Fundera över de begränsande funktionernas "utseende"
- L3.9 Förläng med konjugatet och bryt ut  $|x|$
- L3.10 a-c) Faktorisera och förkorta  
d) Faktorisera nämnaren  
e) Bryt ut  $|x|$   
f) Bryt ut  $|x|$
- L3.11 a) Förläng med konjugat och bryt ut  $|x|$   
b) Uppenbart svar

- Ö4.10 Skapa ett "fyrvåningsbråk" genom att förlänga med täljarens konjugat där uppe och nämnarens konjugat där nere.
- Ö4.23 a-b) Uppenbara svar  
c-f) Faktorisera  
g-h) Uppenbara svar  
h) Gör liknämningt, slå samman och faktorisera
- L3.47 a) Bryt ut det dominerande och förkorta  
b) Bryt ut det dominerande och förkorta  
c) Bryt ut  $|x|$   
d) Bryt ut  $|x|$

### *Kontinuerliga funktioner*

- Ö4.25 a-d) Fundera över om funktionen är en elementär funktion (alla sådana är kontinuerliga över alla värden som funktionen är definierad för) samt om det finns punkter (vilka ingår i definitionsmängden) som har olika vänster- och högergränsvärde
- Ö4.26 Bestäm vänster- och högergränsvärde i "skarven"
- Ö4.27 Bestäm högergränsvärdet i "skarven" och anpassa konstanten så att vänstergränsvärdet blir detsamma
- Ö4.28 Undersök om gränsvärdet då  $x \rightarrow 2$  är detsamma som funktionsvärdet då  $x = 2$
- Ö4.30 Bestäm om möjligt gränsvärdet då  $x \rightarrow 1$  för att sedan (om det existerar) utvidga funktionen med lämpligt anpassad punkt
- L3.17 a) Bestäm vänster- och högergränsvärde i "skarven"  
b) Undersök om gränsvärdet då  $x \rightarrow 2$  är detsamma som funktionsvärdet då  $x = 2$
- L3.22 Visa att funktionen kurva "korsar  $x$ -axeln" enligt sats 3.9
- Ö4.32 Visa att funktionernas kurvor "korsar varandra" enligt sats 3.9
- Ö4.35 Visa att  $f(x + h) > f(x)$  för alla  $h > 0$  och därmed är funktionen strängt växande och har invers
- L3.23 a) Visa att funktionernas kurvor "korsar varandra" enligt sats 3.9 inom exempelvis intervallet  $x \in \left[0 + \frac{\pi}{2}\right]$

b) Resonera kring att funktionerna är strängt monotona – annars skulle de inte existera som inverser till  $\cos x$  respektive  $\tan x$

- L3.19 a) Bestäm om möjligt gränsvärdet då  $x \rightarrow 0$  för att sedan (om det existerar) utvidga funktionen med lämpligt anpassad punkt
- b) Bestäm om möjligt gränsvärdet då  $x \rightarrow 0$ , genom förlängning med täljarens konjugat, för att sedan (om det existerar) utvidga funktionen med lämpligt anpassad punkt
- L3.20 Skriv om med hjälp av sinus för dubbla vinkeln
- L3.27  $f(x)$  som har tvådelad definitionsmängd är faktiskt kontinuerlig på hela sin definitionsmängd men detta är ingen garanti för att dess invers, om den existerar, också är kontinuerlig. Inversen visar sig ha sammanhängande definitionsmängd (vilken?) och inom denna fås inget entydigt gränsvärde då  $x \rightarrow 1$

### Standardgränsvärden

- Ö4.41 a) Bryt ut  $x$  i nämnaren, förläng med 4 och utnyttja standardgränsvärde, se sats 3.11
- b) Förläng med  $\frac{1}{x}$  och utnyttja standardgränsvärde, se sats 3.11
- c) Begränsad täljare och oändlig nämnare
- d) En faktor  $x \rightarrow 0$  och en begränsad faktor
- e) Förläng med  $\sin 2x$  och utnyttja standardgränsvärde
- f) Förläng med  $x^2$
- Ö4.37 a) Faktorisera täljaren och utnyttja standardgränsvärde
- b) Förläng med 4 och  $e^{2x}$ , faktorisera täljaren och utnyttja standardgränsvärde
- Ö4.42 a) Förläng med täljarens konjugat, "trigettan" och utnyttja standardgränsvärde
- b) Substitution  $t = x - \frac{\pi}{2}$
- c) Sats 3.12
- d) Förläng med  $\frac{1}{4x}$  och utnyttja standardgränsvärde
- e) Förläng med  $\frac{1}{2x}$  och utnyttja standardgränsvärde

f) Förläng med  $\sin^2 x$ , förkorta inom  $\tan x$  och utnyttja standardgränsvärde



- L3.28
- a) Förläng med 2 och utnyttja standardgränsvärde
  - b) Förläng med exempelvis  $12x$  och utnyttja standardgränsvärden
  - c) Förläng med exempelvis  $15x$  och utnyttja standardgränsvärden
  - d) Förläng med  $x$  och utnyttja standardgränsvärden
  - e) Förläng med täljarens konjugat, "trigettan" och utnyttja standardgränsvärden
  - f) Substitution  $t = x - \frac{\pi}{2}$  och subtraktionssats för cosinus
- L3.29
- a) Bryt ut  $5x$  i nämnaren och utnyttja standardgränsvärde
  - b) Förläng med  $3 \sin 3x$  och utnyttja standardgränsvärde
  - c) Förläng med  $x^3$  och utnyttja standardgränsvärde
  - d) Förläng exponenten med  $3x$  och utnyttja standardgränsvärde
  - e) Förläng med 7 och utnyttja standardgränsvärde
  - f) Förläng med  $x \sin x$ , använd  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  och utnyttja standardgränsvärde
- Ö4.36
- a) Uppenbart gränsvärde
  - b) Sats 3.13 kallad hastighetstabellen
  - c) Bryt ut det dominerande
  - d) Bryt ut det dominerande
- Ö4.37
- a) Faktorisera täljaren och utnyttja standardgränsvärde
  - b) Förläng med  $e^{2x}$ , faktorisera täljaren och utnyttja standardgränsvärde
- Ö4.38
- a) Sats 3.11
  - b) Uppenbart gränsvärde
- L3.30
- Samma höger- och vänstergränsvärde i skarvarna, räta linjens ekvation på  $k$ -form

- L3.31 a) Faktorisera täljaren och utnyttja standardgränsvärde  
 b) Förläng med  $e^{2x}$ , faktorisera täljaren och utnyttja standardgränsvärde  
 c) Utnyttja att  $x = e^{\ln x}$  och räkneregel f) i Sats 3.11  
 d) Utnyttja att  $x = e^{\ln x}$  och potensregel  
 e) Utnyttja logaritmlag och sedan variabelbyte enligt  $t = 2/x$   
 f) Variabelbyte enligt  $t = \pi - x$  och subtraktionsats för sinus
- L3.33a) Polynomdividera och studera resttermen
- L3.34 a) Sats 3.13 b)  
 b) Bryt ut det dominerande  $e^x$ , sedan Sats 3.13 b)  
 c) Ersätt enligt  $7x = 5x \frac{7}{5}$  och använd potenslag samt Sats 3.11  
 d) Utnyttja att  $\ln(e^{2x} + x) = \ln(e^{2x}(1 + e^{-2x}x)) = \ln e^{2x} + \ln(1 + e^{-2x}x)$   
 samt att  $e^{1+\ln x} = e^1 e^{\ln x} = ex$
- L3.36 a) Polynomdividera och studera resttermen  
 b) Utnyttja att  $\ln(x + 1) - \ln(2x - 3) = \ln(x + 1) - \ln\left(2\left(x - \frac{3}{2}\right)\right)$   
 $= \ln(x + 1) - \ln 2 - \ln\left(x - \frac{3}{2}\right) = \dots = -\ln 2 + \ln\left(\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{3}{2x})}\right)$

### Definition av derivata

- Ö5.7 Tillämpa derivatans definition  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  på aktuella funktioner
- Ö5.8 Tillämpa derivatans definition  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  på aktuell funktion.  
 Sedan rätta linjen på enpunktform  $y - y_p = k(x - x_p)$  med  $x_p = 1$  och  $y_p = f'(1)$   
 och  $f'(1) = k$
- L4.1 Tangentens lutning  $k_1 = f'(-1)$  och normalens lutning  $k_2 = -\frac{1}{k_1}$
- L4.2 Tillämpa derivatans definition  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$  på aktuella funktioner
- L4.3 Tillämpa derivatans definition med  $x = 0$  så att  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$

- L4.4 Använd derivatans definition med  $x = 0$  så att  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$
- L4.6 Använd derivatans definition, gör liknämning samt förläng med konjugat
- L4.59 Använd derivatans definition, gör liknämning samt förläng med konjugat

### Beräkning av derivator

- L4.9 Derivera med hjälp av deriveringsregler och testa gärna att polynomdividera först
- Ö5.9 Använd kända deriveringsregler som (av andra) härletts fram med hjälp av derivatans definition + induktion
- Ö5.10 Använd kända deriveringsregler som (av andra) härletts fram med hjälp av derivatans definition + induktion
- L4.10 Kedjeregeln – alltså multiplicera med inre derivata samt utnyttja att  $x = e^{\ln x}$  i c)
- Ö5.14 Använd kända deriveringsregler som (av andra) härletts fram med hjälp av derivatans definition + induktion
- Ö5.20 Inse att  $f'(2) = 35$  och utnyttja symmetri genom att använda  $f'(2)$
- L4.14 Se sats 4.6
- L4.19 Tillämpa deriveringsregler
- L4.21 Tillämpa deriveringsregler
- L4.60 Tillämpa deriveringsregler
- L4.63 Skriv om funktionen utan absolutbelopp
- L4.65 
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dv}{dh}}$$
- Ö5.16 Undersök kontinuitet i "skarven". Om kontinuitet fortsätt med att undersöka om vänster- och högerderivata är lika.
- Ö5.17 Skriv om funktionen utan absolutbelopp, undersök kontinuitet i skarvarna (den visar sig vara kontinuerlig), derivera för att få derivator för *inre* punkter inom respektive intervall, undersök vänster- och högerderivata i punkterna med hjälp av derivatans definition (ej på annat sätt).
- Ö5.19 Man söker alltså derivatan till den sammansatta funktionen  $g(f(x))$  vilken är  $g'(f(x)) \cdot f'(x)$  och för  $x = 0$  får man  $g'(f(0)) \cdot f'(0) = g'(1) \cdot 2 = 6$
- L4.12 Tillämpa deriveringsregler

### Några viktiga satser om derivator

- Ö5.26 Extrempunkter är alltid någon av följande tre alternativ: stationära punkter ( $f'(x) = 0$ ) (terrasspunkter undantagna), singulära punkter ( $f'(x) \nexists$ ) eller ändpunkter. I denna uppgift existerar endast stationära punkter.
- Ö5.27 Extrempunkter är alltid någon av följande tre alternativ: stationära punkter ( $f'(x) = 0$ ) (terrasspunkter undantagna), singulära punkter ( $f'(x) \nexists$ ) eller ändpunkter. I denna uppgift existerar stationära punkter och singulära punkter.
- L4.24 Extrempunkter bestäms och teckenstudium genomförs. Notera att funktion med absolutbelopp ersätts med funktioner utan absolutbelopp, inom rätt intervall.
- L4.25 Extrempunkter bestäms och teckenstudium genomförs. Notera att funktion med absolutbelopp ersätts med funktioner utan absolutbelopp, inom rätt intervall.
- L4.26 a) Använd derivatans definition. Visa att  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \dots = 0$  för båda funktionerna.
- b) Studera tecknet hos funktionen då man närmar sig origo och fundera över om man i origo kan fastställa om det rör sig om en lokal minimi- maximi- eller terrasspunkt. Eftersom att tecknet hela tiden skiftar kan man dra slutsatsen att...
- L4.27 Tillämpning av medelvärdessatsen. Inled med att teckna differenskvoten
- $$\frac{|\cos x - \cos y|}{|x - y|} = f'(\xi)$$

### Användning av derivator

- Ö5.28 Samtliga stationära punkter, singulära punkter och ändpunkter bestäms i den mån de existerar. Deras funktionsvärden avgör vad som är största respektive minsta värde.
- L4.28a Samtliga stationära punkter, singulära punkter och ändpunkter bestäms i den mån de existerar. Deras funktionsvärden avgör vad som är största respektive minsta värde.
- L4.32a Bestäm samtliga asymptoter, stationära punkter, teckenstudera derivatan och skissa grafen.
- L4.34, Döp kortsidorna till  $x$ , bestäm en areafunktion med tillhörande definitionsmängd. Därefter bestäms största med hjälp av stationära punkter, singulära punkter och ändpunkter (i den mån de existerar).
- L4.39 Skapa en funktion som har nollställen i de sökta punkterna. Utnyttja sats 3.9 för att visa att minst en rot finns, därefter teckenstuderas derivatan för att visa att det finns högst en rot.
- Ö5.33 Teckenstudera derivatan.

- Ö5.30 Bestäm samtliga asymptoter, eventuell sned asymptot enligt metoden på sid 209-210, teckenstudera derivatan och skissa grafen.
- Ö5.31 Se Ö5.30
- L4.35 Döp radien till  $x$ , bestäm en volymfunktion med tillhörande definitionsmängd
- L4.28b Bestäm samtliga asymptoter, eventuell sned asymptot enligt metoden på sid 209-210, teckenstudera derivatan och skissa grafen.
- L4.67 Bestäm samtliga asymptoter, eventuell sned asymptot enligt metoden på sid 209-210, teckenstudera derivatan och skissa grafen.
- L4.36 Lös först uppgiften för  $r = 1$ , alltså inom enhetscirkeln, med  $b = 2 \cos \alpha$  och  $h = 1 + (-\sin \alpha)$ .

### *Derivator av högre ordning.*

- L4.41 Derivera med kedjeregeln respektive produktregel
- L4.45 Kontrollera att punkten är en stationär punkt (eller singular punkt) och då den är stationär kontrolleras andraderivatan i punkten.
- L4.46  $f(x)$  är strängt konvex om  $f''(x) > 0$  och är strängt konkav om  $f''(x) < 0$
- L4.47 Inflexionspunkter har olika tecken hos andraderivatan på olika sidor om punkten – alltså har  $y = x^3$  inflexionspunkt i origo medan  $y = x^4$  inte har det. Ofta sammanfaller detta med att andraderivatan är noll men inte alltid, som t.ex. origo för  $y = x^{\frac{1}{3}}$  som saknar derivator i origo men ändå har en inflexionspunkt i origo.
- L4.42 Andraderivatans definition, med hjälp av  $f'(x) = 1 + 2x \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}$  och  $f'(0) = 1$  från tidigare testuppgift, ger att andraderivata (dess gränsvärde) saknas i origo. För övriga  $x$ -värden fås  $f''(x)$  genom derivering av  $f'(x)$ .
- L4.43 Derivera varv efter varv och upptäck mönster...
- L4.44 Derivatans definition för origo och derivering för övriga värden.
- Ö5.44 Derivera varv efter varv och upptäck mönster...
- Ö5.45 Först kedjeregeln, sedan produkt- och kedjeregeln

### *Primitiva funktioner. Partiell integration*

- Ö6.1 Sats 5.2, 5,3 och 5,4
- Ö6.2 Sats 5.2
- Ö6.12 Sats 5.4 (partiell integration) med faktorn 1

- Ö6.4 Sats 5.2
- Ö6.5 Sats 5.4 (partiell integration)
- Ö6.6 Sats 5.4 (partiell integration), faktorisera parentesen i c)
- L5.3 Sats 5.2, 5,3 och 5,4
- L5.4 Förkorta med  $a^2$  så att standardprimitiv (i) kan användas
- L5.5 Sats 5.4 (partiell integration)
- L5.7 Sats 5.4 (partiell integration)
- Ö6.3 Derivera högerledet och se
- L5.25 Derivera högerledet och se
- L5.28 Anpassa konstanten
- L5.8 Anpassa konstanten