

Kontrollskrivning 1 - 2014

Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer

Kurskod: TNIU22
Examination: KTR1
Max: 12 p
Bonus 2 p: Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p: Vid resultat 5–7 p
Bonus 0 p: Vid resultat 0–4 p
Lösningar: Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Inga utöver skrivdon, linjaler och passare
Skrivtid: 2014-11-24, 08:00–10:00

1. Bestäm a och b så att $f(x)$ blir en kontinuerlig funktion:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 3x} & \text{för } x \neq 0 \text{ och } x \neq 3 \\ a & \text{för } x = 0 \\ b & \text{för } x = 3 \end{cases}$$

3 p

Svar: $a = -2$ och $b = 1$

2. Beräkna med hjälp av standardgränsvärden:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{8x} - 1)(1 - \cos x)}{\arctan x^2 \ln(1 + 2x)}$$

3 p

Svar: 2

3. Låt $f(x)$ vara den strängt växande funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 2 & \text{då } 0 \leq x < 2 \\ 2x - 3 & \text{då } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Visa med hjälp av gränsvärde att den tillhörande inversen $f^{-1}(x)$ inte är en kontinuerlig funktion.

3 p

Svar: Inversen har diskontinuitet i $x = 3$ vilket inses eftersom att funktionsvärdet $f^{-1}(3)$ skiljer sig från vänstergränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 3^-} f^{-1}(x)$

4. Teorifrågor:

- a) Ett gränsvärdesproblem av typen $\left[\frac{0}{0}\right]$ måste utredas ytterligare innan man kan bestämma dess värde.
Vilka andra *tre* typer av gränsvärdesproblem kräver också ytterligare utredning för att deras värden skall kunna bestämmas?

Svar: Gränsvärde av typen $[\infty/\infty]$, $[\infty \cdot 0]$ och $[\infty - \infty]$

- b) Vid axiomatisk framställningen av $\ln x$ kan man bl.a. utgå från sambandet

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

- i) Visa med hjälp av sambandet ovan att

$$\ln 1 = 0$$

Svar: $\ln x = \ln(1 \cdot x) = [\text{enligt sambandet ovan}] = \ln 1 + \ln x$
vilket efter ledvis subtraktion med $\ln x$ visar att $\ln 1$ måste vara lika med noll

- ii) Visa med hjälp av sambandet ovan att

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

Svar: $\ln x = \ln\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = [\text{enligt sambandet ovan}] = \ln \frac{x}{y} + \ln y$
vilket efter ledvis subtraktion med $\ln y$ visar att $\ln x - \ln y = \ln \frac{x}{y}$