INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning 1 – 2019

Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Bonus 0 p:	Vid resultat 0–4 p
Lösningar:	Fullständiga med förklarande tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, gradskiva, kurvmall och passare
Skrivtid:	2019-11-27, 08:00–10:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1) Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)\ln(2x+1)}{1-\cos x}$$

Lösningtips:

Efter förlängning med nämnarens konjugat får man

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)\ln(2x+1)\,(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\cdots=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)\ln(2x+1)\,(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

som med förlängning och standardgränsvärden enligt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\frac{(e^{3x}-1)}{3x}}^{sgv}\cdot\cancel{3x}\cdot\overbrace{\ln\frac{(2x+1)}{2x}}^{sgv}\cdot\cancel{2x}\cdot\overbrace{(1+\cos x)}^{\to 2}}{\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{sgv}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{sgv}\cdot\cancel{x^2}}$$

ger svaret 12.

b)

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2}\right)$$

Lösningtips:

Förlängning med uttryckets konjugat ger efter förenkling i täljaren

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2}}=\cdots=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{|x|\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+\sqrt{1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{6}{x}}+\sqrt{1}\right)}=\cdots=-3$$

c)

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln 3(x+h)-\ln 3x}{h}$$

Lösningtips:

Logaritmlag ger

$$\lim_{h\to0}\frac{\ln(3x+3h)-\ln 3x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\ln\frac{3x+3h}{3x}}{h}=\lim_{h\to0}\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{sgv}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$$

3 p

2) Lös olikheten

$$\ln(x^2 - 4) \le \ln(x + 2)$$

Lösning:

Innan olikheten löses:

Vänsterledets logaritm kräver att $x^2 - 4 > 0 \iff (x + 2)(x - 2) > 0$

som efter teckenstudie ger kravet $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, \infty\right[$

Högerledets logaritm kräver att $x + 2 > 0$ som ger kravet $x \in \left]-2, \infty\right[$

Snittet av ovanstående krav blir $x \in \left]2, \infty\right[$

Alltså kräver logaritmerna i VL och HL att $x > 2$.

Dags att lösa olikheten...

$$\ln(x^2 - 4) \le \ln(x + 2)$$

$$\iff \quad e^{\ln(x^2-4)} \le e^{\ln(x+2)}$$

$$\iff \quad x^2 - 4 \le x + 2 \quad \text{för} \quad x > 2$$

$$\iff \quad x^2 - x - 6 \le 0 \quad \text{för} \quad x > 2$$

$$\iff \quad (x - 3)(x + 2) \le 0 \quad \text{för} \quad x > 2$$

teckenstudie av $(x - 3)(x + 2) \le 0$ ger förslaget $-2 \le x \le 3$

som i kombination med kravet $x > 2$ ger

Svar: $2 < x \le 3$

3 p

3) Kontinuitet och diskontinuitet

a) Anpassa m så att

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & , \quad x > 0 \\ 3x + m & , \quad x \leq 0 \end{cases}$$

blir en kontinuerlig funktion för $x \in \mathbb{R}$.

Lösning:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \cdots = 2$$

Alltså närmar sig den högra delfunktionen punkten $(0, 2)$ som måsta vara ändpunkt i den vänstra delfunktionen som är en rät linje av typen $y = kx + m$. Eftersom att konstanten m hos $y = kx + m$ anger skärningen med y-axeln så gäller att $m = 2$.

b) Anpassa gränsen b så att

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \quad -\infty < x < b \\ x - 4 & , \quad 5 \leq x < \infty \end{cases}$$

så att $f(x)$ blir en kontinuerlig funktion med en diskontinuerlig invers $f^{-1}(x)$.

Lösning:

Diskontinuitet hos inversen inträffar om den öppna änden av den ena delfunktionens invers finns på samma x-koordinat som den slutna änden av den andra delfunktionens invers – alltså det vi kallar ” hål under eller över punkt”.

Spegling i symmetrilinjen ger att om den öppna änden av den ena ordinarie delfunktionen skall finnas på samma y-koordinat som den andra ordinarie delfunktionens slutna ände som finns i punkten $(5, 1)$ – alltså” hål bredvid punkt” på $y = 1$. Med $\mathrm{b} = 2$ får man den öppna änden på just y-koordinat $y = 1$.

Svar: $b = 2$

3 p

4) Några satser:

a) Låt a vara ett nollställe till $f(x)$. Nämn något som följer ur detta enligt sats.

Svar: Om $f(x)$ är ett polynom så är det jämnt delbar med faktorn $(x-a)$ enligt Sats 1.2 (Faktorsatsen).

b) Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion på det kompakta intervallet $[a,b]$. Nämn något som följer ur detta enligt sats.

Svar: Enligt Sats 3.10 följer att tillhörande värdemängd också kompakt.

c) Låt $f(x)$ vara en kontinuerlig funktion på det kompakta intervallet $[a,b]$ samt att $f(a) \neq f(b)$. Nämn något som följer ur detta enligt sats.

Svar: Enligt Sats 3.9 (Satsen om mellanliggande värde) följer att varje funktionsvärde mellan $f(a)$ och $f(b)$ passeras i minst en punkt inom intervallet intervallet $[a,b]$.

d) Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara kontinuerliga funktioner på det kompakta intervallet $[a,b]$ samt $f(a) > g(a)$ och $f(b) < g(b)$. Nämn något som följer ur detta enligt sats.

Svar: Enligt ”följdsatsen till Satsen om mellanliggande värde” följer att funktionerna $f(x)$ och $g(x)$ korsar varandra i minst en punkt på det öppna intervallet $]a,b[$.

e) Låt $f(x)$ vara en strängt monoton och kontinuerlig funktion på ett sammanhängande intervall I. Nämn något som följer ur detta enligt sats.

Svar: Enligt Sats 3.5 existerar inversen $f^{-1}(x)$ och är kontinuerlig på motsvarande intervall J som motsvaras av värdemängden till $f(x)$.

f) Låt $f(x) \to 0$ då $x \to a$ och låt $g(x)$ vara en begränsad funktion. Nämn något som detta medför enligt sats.

Svar: Enligt Sats 3.1 följer då att $\lim\limits_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{\to 0} \underbrace{g(x)}_{\text{begr}} = 0$.

3 p