

Kontrollskrivning – 2021

Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer

Utbildningskod: TNIU22

Modul: KTR1

Max: 12 p

Bonus 2 p: Vid resultat 8–12 p

Bonus 1 p: Vid resultat 5–7 p

Bonus 0 p: Vid resultat 0–4 p

Lösningar: Fullständiga med förklarande tankegångar och tydligt angivna svar

Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, gradskiva, kurvmall och passare

Skrivtid: 2021-11-24, 14:00–16:00

Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1) Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 6x} - 1) \tan 4x}{\ln(1 + 3x^2)}$$

Ledning: Förlängning med bland andra $\sin 6x$ ger med
standarsgränsvärden svaret 8.

2 p

b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^4 - x^4}{h}$$

Ledning: Utveckling och förkortning med h ger $4x^3$.

2 p

- 2) Visa med hjälp av "följdsatsen till satsen om mellanliggande värde" att funktionerna har minst en skärningspunkt:

$$f(x) = \arccos x$$

$$g(x) = e^x$$

Ledning: Man studerar funktionerna inom ett kompakt intervall, till exempel intervallet $x \in [-1, 1]$ inom vilket *båda* funktionerna är definierade. Man visar att i ena kanten gäller att $f(-1) > g(-1)$ och i andra kanten gäller att $f(1) < g(1)$. Man påtalar även att de båda funktionerna är *kontinuerliga* enligt sats; de är elementära funktioner. Därmed är alla villkoren uppfyllda och satsen kan tillämpas med slutsatsen att det finns minst en skärningspunkt inom det öppna intervallet - i detta fall $x \in [-1, 1]$.

2 p

- 3) Lös olikheten

$$\ln 3x \geq \ln(9x - x^2)$$

Ledning: Vänsterledet kräver att $x \in]0, \infty[$ och högerledet kräver att $x \in]0, 9[$ vilket inses genom faktorisering och teckenstudie. Sammanfattningsvis är olikheten definierad för $x \in]0, 9[$ vilket är snittet av mängderna. Olikheten löses (bland annat genom faktorisering och teckenstudie) och man får till en början förslaget $x \in]-\infty, -6] \cup [6, \infty[$ som i snitt med definitionsmängden $x \in]0, 9[$ ger lösningsmängden $x \in [6, 9[$

3 p

- 4) Para ihop funktion med korrekt påstående, utifrån egna skisser av tillhörande grafer:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , 4 < x \leq 6 \end{cases}$

i) Funktionen är diskontinuerlig, är strängt monotont och har kontinuerlig invers.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , 7 < x \leq 9 \end{cases}$

ii) Funktionen är diskontinuerlig, är inte strängt monotont och saknar invers.

c) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , 6 \leq x \leq 8 \end{cases}$

iii) Funktionen är kontinuerlig, är strängt monotont och har kontinuerlig invers.

d) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , 8 \leq x \leq 10 \end{cases}$

iv) Funktionen är kontinuerlig, är inte strängt monotont och saknar invers.

e) $f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & , 2 \leq x \leq 4 \\ x - 3 & , 0 \leq x < 2 \end{cases}$

v) Funktionen är kontinuerlig, är strängt monotont och har diskontinuerlig invers.

Svar: a = ii, b = v, c = iv, d = iii och e = i

3 p