

## Kontrollskrivning – 2022

### Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer

Utbildningskod: TNIU22

Modul: KTR1

Max: 12 p

Bonus 2 p: Vid resultat 8–12 p

Bonus 1 p: Vid resultat 5–7 p

Bonus 0 p: Vid resultat 0–4 p

Lösningar: Fullständiga med förklarande tankegångar och tydligt angivna svar

Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, gradskiva, kurvmall och passare

Skrivtid: 2022-11-23, kl 14:00–16:00

Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

1) Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{6x}$$

Svar:  $\frac{1}{3}$

b)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h}$$

Svar:  $\frac{1}{x}$

c)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

Svar:  $\infty$

3 p

2) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^2 - 6x + 9} & , x \neq 3 \\ A & , x = 3 \end{cases}$$

och bestäm vilka värden  $A$  som gör att  $f(x)$  blir en **diskontinuerlig** funktion.

Svar: Alla värden  $A \neq 4$  ger en diskontinuerlig funktion

3 p

- 3) Redogör för "satsen om mellanliggande värde" och förklara med hjälp av en skiss och förklarande text varför satsen enbart gäller för kontinuerliga funktioner.

Ledning: Se satsen på sidan 142 i läroboken. Genom att skissa en kurva till en diskontinuerlig funktion, med glapp i värdemängden mellan funktionsvärdena  $f(a)$  och  $f(b)$ , kan man visa att satsen inte kan gälla för diskontinuerliga funktioner.

3 p

- 4) Korta teorifrågor:

- a) Låt  $f(x)$  vara definierad i en omgivning till punkten  $x = a$  och

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Vilken slutsats kan man dra av detta?

Svar: T.ex. att funktionen  $f(x)$  är kontinuerlig i  $x = a$ .

- b) Låt  $f(x) \rightarrow 0$  då  $x \rightarrow a$  och att gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$$

Vilken slutsats kan man dra om  $g(x)$ ?

Svar: Att funktionen  $g(x)$  är begränsad i  $x = a$  eller att " $g(x)$  går långsammare mot  $\pm\infty$  än  $f(x)$  går mot noll".

- c) Vad krävs för att en kontinuerlig funktion  $f(x)$  garanterat skall ha ett största och ett minsta värde på ett intervall  $I$ ?

Svar: T.ex. att intervallet  $I$  är ett kompakt intervall.

- d) Låt gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existera ändligt.

Vilken slutsats kan man dra om  $f(x)$ ?

Svar: T.ex. att funktionen  $f(x)$  är deriverbar i  $x = a$ .

- e) Låt  $f(x)$  vara en kontinuerlig och strängt monoton funktion på det sammanhängande intervallet  $I$ . Vilken slutsats kan man dra av detta?

Svar: T.ex. att funktionen  $f(x)$  har en kontinuerlig invers (på ett intervall  $J$ ).

- f) Vad krävs för att två funktioner  $f(x)$  och  $g(x)$  garanterat skall skära varandra i minst en punkt på ett kompakt intervall  $[a, b]$ ?

Svar: T.ex. att funktionen  $f(a) > g(a)$  och  $f(b) < g(b)$  eller tvärtom.

