INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

# Kontrollskrivning – 2023

## *Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer*

| | |
|---|---|
| Utbildningskod: | TNIU22 |
| Modul: | KTR1 |
| Max: | 12 p |
| Bonus 2 p: | Vid resultat 8–12 p |
| Bonus 1 p: | Vid resultat 5–7 p |
| Bonus 0 p: | Vid resultat 0–4 p |
| Lösningar: | Fullständiga med förklarande tankegångar och tydligt angivna svar |
| Hjälpmedel: | Skrivdon, linjal, gradskiva, kurvmall och passare |
| Skrivtid: | 2023-11-23, kl 08:00–10:00 |
| Jour: | Peter Holgersson, 0705-19 99 92 |

---

1) Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\sin 4x\,\ln(1+6x)}$$

Ledning: Förlängning för att kunna utnyttja standardgränsvärden i nämnaren samt med täljarens konjugat ger gränsvärdet $\frac{1}{12}$.

b)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

Ledning: Förlängning med täljarens konjugat ger efter förenkling uttrycket $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (som är derivatan till $\sqrt{x}$ med avseende på $x$).

c)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{9x^2-3x}}{6x}$$

Ledning: Utbrytning av den dominerande termen i täljaren ger efter förkortning gränsvärdet $-\frac{1}{2}$.

3 p

2) Lös olikheten

$$\ln 5x \leq \ln(36 - x^2)$$

Ledning: Vänsterledet kräver att $x > 0$. Högerledet kräver att $36 - x^2 > 0$ som efter faktorisering och teckenstudie ger $-6 < x < 6$. Därmed studeras olikheten enbart inom snittet $0 < x < 6$. Olikheten löses och efter implikation får man förslaget $-9 \leq x \leq 4$ som tillsammans kravet $0 < x < 6$ ger snittet och lösningsmängden $0 < x \leq 4$ som också kan skrivas $x \in ]0, 4]$ .

3 p

3) Utvidga funktionen

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}{x^2 - 6x + 8}$$

så att den blir kontinuerlig för alla reella tal.

Ledning: Faktorisering av den rationella funktionen ger

$$f(x) = \frac{(x-4)(x-2)(x+3)}{(x-4)(x-2)}$$

som visar att funktionen inte är definierad i punkterna $x = 2$ och $x = 4$. Tack vare att funktionens gränsvärden är ändliga då $x \to 2$ respektive $x \to 4$ med gränsvärdena 5 respektive 7 kan man utvidga funktionen enligt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3x^2 - 10x + 24}{x^2 - 6x + 8} & , \quad x \neq 2 \quad \text{och} \quad x \neq 4 \\ 5 & , \quad x = 2 \\ 7 & , \quad x = 4 \end{cases}$$

så att den blir kontinuerlig för alla reella tal.

3 p

4) Korta teorifrågor – svara "**RÄTT**" eller "**FEL med en kort motivering**" till varje svar:

a) Påstående:

Låt ett gränsvärde existera ändligt enligt

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Då vet man att $f(x)$ är kontinuerlig i $x = a$.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; det är inte säkert att $A = f(a)$. Det kan alltså vara "ett hål" i $(a, A)$ över eller under funktionens punkt $\big(a, f(a)\big)$ och därmed en diskontinuitet i $x = a$ .

b) Påstående:

Om

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

så medför det att

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$$

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; om $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ är ett oegentligt gränsvärde (alltså $\infty$ eller $-\infty$) så kan $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)$ lika gärna bli konstant, oegentligt eller saknas.

c) Påstående:

Om en funktion $f(x)$ är definierad på ett sammanhängande öppet intervall så saknar den största och minsta värde.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; funktionen *kan* då ha största eller minsta värde i inre punkter.

d) Påstående:

Om gränsvärdet

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existerar ändligt så är $f(x)$ deriverbar i punkten $x = a$.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Rätt; så definierar man derivata i punkten $x = a$ .

e) Påstående:

Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig och strängt monoton så har den en kontinuerlig invers.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; om definitionsmängden inte är sammanhängande så *kan* inversen vara diskontinuerlig.

f) Påstående:

Två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ är definierade på intervallet $[a, b]$ och i ”ändarna” gäller att $f(a) > g(a)$ respektive $f(b) < g(b)$. Då har funktionerna garanterat minst en skärningspunkt i det öppna intervallet $]a, b[$ .

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; om funktionerna tillåts vara diskontinuerliga så *kan* funktionernas kurvor ”smita förbi varandra” i en eller flera diskontinuiteter och skär då aldrig varandra.

3 p