INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning – 2024

Envariabelanalys del 1 för byggnadsingenjörer

Utbildningskod:	TNIU22
Modul:	KTR1
Institution:	ITN
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Bonus 0 p:	Vid resultat 0–4 p
Lösningar:	Fullständiga med förklarande tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, gradskiva, kurvmall och passare
Skrivtid:	2024-11-28, kl 08:00–10:00
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92

---

1) Beräkna följande gränsvärden:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\ln(1+3x)\,(e^{6x}-1)}$$

Ledning: Förlängning med täljarens konjugat, ”trigettan” och förlängning för att kunna utnyttja standardgränsvärden ger gränsvärdet $\frac{1}{9}$.

b)

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{12x}{\sqrt{9x^2-3x}}$$

Ledning: Utbrytning av exempelvis $9x^2$ i rotuttrycket ger faktorn $|3x|$ som ersätts med $-3x$ p.g.a. negativa värden, förkortning ger gränsvärdet -4.

3 p

c)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^5-x^5}{h}$$

Ledning: Utveckling med hjälp av Binomialkoefficienter och förkortning ger gränsvärdet $5x^4$

2) Anpassa m så att

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x - 3} & , \ x > 3 \\ 3x + m & , \ x \leq 3 \end{cases}$$

så att den blir kontinuerlig för alla reella tal.

Ledning: Den högra delfunktionens ha högergränsvärdet -2 i skarven $x = 3$ så att den vänstra delfunktionen måste ha ändpunkten $(3, -2)$ vilket medför att $m = -11$.

3 p

3) Lös olikheten

$$3^x \leq 7 \cdot 3^{x/2} + 18$$

Ledning: Variabelskifte $y = 3^{x/2}$ med $y > 0$ ger andragradsolikheten $(y - 9)(y + 2) \leq 0$ som efter teckenstudie och hänsyn till att $y = 3^{x/2} > 0$ ger intervallet $y =\in]0, 9]$ vilket motsvarar $3^{x/2} \in]0, 9]$ vilket ger $x \in]-\infty, 4]$

3 p

4) Korta teorifrågor – svara ”**RÄTT**” eller ”**FEL med en motivering varför**” till varje svar:

a) Påstående:

En strängt växande och kontinuerlig funktion kan ha en diskontinuerlig invers.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Rätt; om definitionsmängd kan det hos inversen motsvaras av ”ett hål” över eller under en punkt.

b) Påstående:

Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & , \ x < 0 \\ x + 1 & , \ x > 0 \end{cases}$$

kan inte kompletteras (utvidgas) med en punkt i $x = 0$ så att den blir kontinuerlig för alla reella tal.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Rätt; oavsett vilket funktionsvärde man väljer så blir funktionen diskontinuerlig från minst ett håll i $x = 0$.

c) Påstående:

Om

$$\lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

så medför det att

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; påståendet gäller enbart om gränsvärdet $\lim_{x \to a} f(x)$ är begränsat

.

d) Påstående:

Låt funktionen $f(x)$ vara definierad i en omgivning till $x - 4$. Om gränsvärdena

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

och

$$\lim_{x \to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$$

existerar ändligt och är och lika så är $f(x)$ deriverbar i punkten $x = 4$.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Rätt; då är vänster- och högerderivatan lika i $x = 4$.

e) Påstående:

Funktionen $f(x) = \tan x$ är diskontinuerlig i $x = \frac{\pi}{2}$

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; ingår inte i definitionsmängden för $f(x) = \tan x$.

f) Påstående:

Funktionen $f(x)$ är definierad på intervallet $[a, b]$ och $f(a) \neq f(b)$. Då existerar alla mellanliggande funktionsvärden i minst en punkt inom det öppna intervallet $]a, b[$.

Är detta Rätt eller Fel?

Svar: Fel; om funktionen tillåts vara diskontinuerliga så *kan* funktionen sakna delar av eller alla mellanliggande funktionsvärden.

3 p