

Kontrollskrivning 2015

Envariabelanalys del 2

Kurskod: TNIU23
Examination: KTR1
Max: 12 p
Bonus 2 p: Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p: Vid resultat 5–7 p
Lösningar: Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall
Skrivtid: 2015-02-11 kl 08:00-10:00

1.

Beräkna

a) $\int \frac{4}{x^2+6x+8} dx$

Lösning: Partialbråksuppdelning ger $\frac{-2}{x+4} + \frac{2}{x+2} + C$

b) $\int \frac{4x+3}{1+x^2} dx$

Lösning: $\int \frac{4x+3}{1+x^2} dx = 2 \ln(1+x^2) + 3 \arctan x + C$

c) $\int 2x \tan x^2 dx$

Lösning: $\int 2x \tan x^2 dx = \left| \begin{array}{l} \text{Kedjeregeln} \\ \text{baklänges} \end{array} \right| = \int \tan y dy$

$= - \int \frac{-\sin y}{\cos y} dy = -\ln|\cos y| + C = -\ln|\cos x^2| + C$

2. Beräkna

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \arctan t \, dt$$

med hjälp av bland annat derivatans definition och medelvärdessatsen för integraler. Stöd resonemangen med en tydlig figur.

Lösning:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_a^x \arctan t \, dt &= S'(x) = \left[\begin{array}{c} \text{Enligt derivatans} \\ \text{definition} \\ \text{Definition 4.1} \end{array} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (S(x+h) - S(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} \arctan t \, dt - \int_a^x \arctan t \, dt \right) \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Enligt räkneregler} \\ \text{6.2 (e) för} \\ \text{integraler} \end{array} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^x \arctan t \, dt + \int_x^{x+h} \arctan t \, dt - \int_a^x \arctan t \, dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \arctan t \, dt = \left[\begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler} \end{array} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{\arctan \xi}_{\substack{\text{medelhöjd} \\ \text{ggr bredd}}} ((x+h) - x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \arctan \xi = \left[\begin{array}{c} \text{Tack vare} \\ \text{instängning av } \xi \\ \text{mellan } x \text{ och } x+h \end{array} \right] = \lim_{\xi \rightarrow x} \arctan \xi \\ &= \left[\begin{array}{c} \text{Tack vare att } f \\ \text{är kontinuerlig i } x \end{array} \right] = \arctan x \end{aligned}$$

3. För naturliga tal n gäller att $0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
Visa med hjälp av en översumma och sambandet ovan att

$$\int_0^3 x^2 dx = 9$$

Ledning: Rita en figur med kurva $y = x^2$ och tillhörande övertrappa med n st delintervall. Översumma består av n st remsor med bredden $\frac{3}{n}$ vid positionerna $\frac{3i}{n}$ och resorna har höjderna $\left(\frac{3i}{n}\right)^2$

$$\int_0^3 x^2 dx = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{3i}{n}\right)^2}_{\substack{\text{remsors} \\ \text{höjd ggr} \\ \text{bredd}}} \cdot \frac{3}{n} = \frac{27}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{27}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 9 + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2} \rightarrow 9 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

4. Beräkna

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x + 1} dx$$

Lösning: Substitution med $y = \tan \frac{x}{2}$ ger

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1 + \tan^2 \frac{x}{2}) \Leftrightarrow \frac{2dy}{1+y^2} = dx$$

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \dots = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{2y}{1+y^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \dots = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

Integralen löses nu enligt :

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x + 1} dx = \int \frac{\frac{2y}{1+y^2}}{\frac{1-y^2}{1+y^2} + \frac{2y}{1+y^2} + \frac{1+y^2}{1+y^2}} \cdot \frac{2dy}{1+y^2} =$$

$$\dots = \int \frac{2y}{(y+1)(y^2+1)} dy = \text{PBU} = \int \left(\frac{-1}{y+1} + \frac{y+1}{y^2+1} \right) dy$$

$$= -\ln|y+1| + \frac{1}{2} \ln|y^2+1| + \arctan y + C$$

$$= -\ln \left| \tan \frac{x}{2} + 1 \right| + \frac{1}{2} \ln \left(\tan^2 \frac{x}{2} + 1 \right) + \arctan \left(\tan \frac{x}{2} \right) + C$$

Uttrycket kan förenklas ytterligare men detta duger.