

## Kontrollskrivning 2018

### Envariabelanalys del 2

Kurskod: TNIU23  
Examination: KTR1  
Max: 12 p  
Bonus 2 p: Vid resultat 8–12 p  
Bonus 1 p: Vid resultat 5–7 p  
Lösningar: Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar  
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall, passare  
Skrivtid: 2018-02-02 kl 14:00-16:00  
Jour: Peter Holgersson 0705-19 99 92

---

1. Beräkna:

a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx$$

Lösning:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos x \, dx = \left. \begin{array}{l} y = \sin x \\ \frac{dy}{dx} = \cos x \\ dy = \cos x \, dx \\ x = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow y = 1 \\ x = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{array} \right| = \int_0^1 y^3 \, dy = \left[ \frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

b)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} \, dx &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \int_{-1}^b \frac{1}{x^2} \, dx + \lim_{b \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{1}{x^2} \, dx \\ &= \lim_{b \rightarrow 0^-} \left[ -\frac{1}{x} \right]_{-1}^b + \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ -\frac{1}{x} \right]_a^1 = (\infty - 1) + (-1 - (-\infty)) = \infty \text{ (divergent)} \end{aligned}$$

c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+2} \left( 3 + \frac{1}{1+x^4} \right) dx$$

Lösning:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+2} \left( 3 + \frac{1}{1+x^4} \right) dx = \left[ \begin{array}{l} \text{Medelvärdes-} \\ \text{satsen för} \\ \text{integraler med} \\ n \leq \xi \leq n+2 \end{array} \right] = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \underbrace{\left( 3 + \frac{1}{1+\xi^4} \right)}_{=f(\xi)} \underbrace{(n+2-n)}_{=b-a} = 6$$

3 p

2. Beräkna integralen med hjälp av en Riemann-summa med  $n$  st delintervall:

$$\int_0^2 x^3 dx$$

Ledning:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lösning med översumma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \frac{2i}{n} \right)^3 \frac{2}{n}}_{=h \cdot b} &= \left( \frac{8 \cdot 1^3}{n^4} + \frac{8 \cdot 2^3}{n^4} + \dots + \frac{8 \cdot n^3}{n^4} \right) = \frac{16}{n^4} (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) \\ &= \left| \begin{array}{l} \text{givet} \\ \text{samband} \end{array} \right| = \frac{16}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{16n^4 + 32n^3 + 16n^2}{4n^4} \\ &= 4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} \rightarrow 4 \text{ då } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

3 p

3. Vissa integraler löses med hjälp av det annorlunda variabelbytet  $y = \tan \frac{x}{2}$ .

a) Tag fram tillhörande uttryck för variabelbyte av  $\sin x$  och  $dx$ .

$$\text{Svar: } \sin x = \frac{2y}{1+y^2} \text{ och } dx = \frac{2dy}{1+y^2}$$

b) Beräkna integralen med hjälp av ovanstående variabelbyte.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2 dy}{1+y^2} = \int_0^1 \frac{1}{\frac{1+y^2}{1+y^2} + \frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2 dy}{1+y^2} \\ &= \int_0^1 \frac{2}{y^2 + 2y + 1} dy = 2 \int_0^1 \frac{1}{(y+1)^2} dy = 2 \int_0^1 (y+1)^{-2} dy \\ &= 2 \left[ \frac{(y+1)^{-1}}{-1} \right]_0^1 = 2 \left[ \frac{-1}{y+1} \right]_0^1 = 2 \cdot \frac{-1}{2} - 2 \cdot (-1) = 1 \end{aligned}$$

3 p

4. Analysens huvudsats berättar att om funktionen  $f(t)$  är kontinuerlig på hela det aktuella intervallet,  $x$  är en variabel och  $a$  är konstant så gäller att:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Bevisa att detta stämmer och komplettera beviset med en förklarande figur.

Svar: Se bevis från föreläsning 4 eller i läroboken

3 p