INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning 1 – 2020

Envariabelanalys del 2

Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Inga utöver skrivdon, linjaler och passare
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare, gradskiva
Skrivtid:	2020-02-07 kl 08:00-10:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

---

1. Beräkna

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+(e^x)^2}\,dx$$

2 p

Lösningstips: Substitution $y = e^x$ (glöm ej att byta integrationsgränserna) ger en integral med svaret $\arctan e - \frac{\pi}{4}$

2. Visa att

$$\frac{23}{36} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx \leq \frac{35}{36}$$

3 p

Lösningstips: Över- och undersumma med $\Delta x = 1$ (ett ”delintervall”) visar sig inte ge tillräckligt snävt intervall. Noggrannheten ökas och med $\Delta x = \frac{1}{2}$ (två delintervall) får man $\frac{25}{36} \leq \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,dx \leq \frac{17}{18} = \frac{34}{36}$ som uppfyller dubbelolikheten ovan eftersom att intervallet ligger inom intervallet ovan.

3. Analysens säger att

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$$

Rita en tydlig skiss och förklara med egna ord vad satsen berättar.

2 p

Lösningstips: Se föreläsning 4 med skiss och kommentar.
Satsen berättar att marginaltillväxten för en integral, när man justerar den högra integrationsgränsen x i positiv riktning, är lika stor som funktionsvärdet i den högra kanten av intervallet. Alltså, när man flyttar den högra integrationsgränsen x åt höger, växer integralen lika snabbt som ”höjden på de nytillkomna remsorna” i högerkant av motsvarande Riemann-summa.

4. Visa att

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\ln x}\,dx$$

är konvergent.

Lösningstips: För alla värden inom det aktuella intervallet gäller att $\frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x^2+\ln x}$ ty nämnaren är större i det högra uttrycket.

Därmed gäller att $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx \geq \int_1^\infty \frac{1}{x^2+\ln x}dx$.

Beräkning (eller hänvisning till sats) visar att den större och enklare integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ är konvergent.

Därmed följer att den ursprungliga mindre integralen $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx$ också måste vara konvergent.

2 p

5. Tag (med hjälp av Pythagoras sats och en tydlig skiss) fram en integral för att beräkna längden av en funktionskurva $f(x)$ inom intervallet $x \in [a,b]$.

Lösningstips: Se Föreläsning 6 eller sid 317 i läroboken – svaret blir:

$$s = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

3 p