INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning 1 – 2022

Envariabelanalys del 2

Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare, gradskiva
Skrivtid:	2022-02-04 kl 14:00-16:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

---

1. Beräkna

a)

$$\int_0^1 \frac{8}{x^2+12x+32}\,dx$$

Lösningstips: $\int_0^1 \frac{4}{x^2+12x+32}\,dx = |\text{PBU}| = \cdots = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+8}\right)dx$

$= 2[\ln|x+4| - \ln|x+8|]_0^1 = 2\big((\ln 5 - \ln 9) - (\ln 4 - \ln 8)\big) = 2\ln\frac{40}{36} = 2\ln\frac{10}{9}$

b)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,dx$$

Lösningstips: Substitution $u = \sin x$ ger $\int_{-1}^{1} \frac{1}{u^2}\,du$ som är generaliserad i $x = 0$ och är divergent med det oegentliga gränsvärdet ∞.

4 p

2. Beräkna integralen med hjälp av en Riemann-summa med n stycken remsor:

$$\int_0^6 x^2\,dx$$

Ledning: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Lösningstips: Det räcker att skapa *en* Riemann-summa med n st termer eftersom över- och undersumma konvergerar mot samma tal. Med översumma får man

$$\int_0^6 x^2\,dx = \cdots = \frac{6^3}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \cdots = 36\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \to 72 \text{ då } n\to\infty$$

2 p

3. Beräkna kurvlängden för funktionskurvan $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $-1\le x\le 1$ med hjälp av en integral.

Lösningstips: Formeln för kurvlängd ger

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \cdots = \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{generalisering hävs}\\ \text{i båda ändarna}\end{matrix}\right| = \cdots = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi$$

2 p

4. Förenkla

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h}\arctan t\,dt$$

Lösningstips: Integralen ersätts enligt *Medelvärdessatsen för integraler* vilket ger $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\,f(\xi)\,2h = \lim\limits_{h\to0} 2\,f(\xi)$ som genom instängningen av ξ ger svaret $2\arctan x$.

2 p

5. Visa att $f(x)=4$ i minst en punkt $x\in[-2,4]$ förutsatt att $f(x)$ är kontinuerlig och

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = 24$$

Lösningstips: Man vet med hjälp av *Medelvärdessatsen för integraler* att $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$ = ”medelhöjd gånger bredd” $= f(\xi)\cdot 6 = 24$ och detta kräver att ”medelhöjden” $f(\xi)=4$ i minst en punkt inom intervallet, vilket skulle visas.

2 p