

Kontrollskrivning 1 - 2023

Envariabelanalys del 2

Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare, gradskiva
Skrivtid:	2023-02-03 kl 08:00-10:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

1. Visa att

$$\frac{21}{36} < \int_0^2 \frac{1}{1+x^3} dx < \frac{55}{36}$$

Lösningstips: En över- och en undersumma med två "remsor" ger $\frac{22}{36} < \int_0^2 \frac{1}{1+x^3} dx < \frac{54}{36}$
vilket uppfyller det som skall visas.

3 p

2. Beräkna

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$$

Lösningstips: variabelbyte $u = e^x$ ger den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du$.
Generaliseringen hävs, integralen löses och har svaret $\frac{\pi}{4}$.

2 p

3. Beräkna

a.

$$\frac{d}{dx} \int_x^5 e^{t^2} dt$$

Lösningstips: Analysens huvudsats efter skifte av integrationsgränserna (alternativt "Krzysztof's formel") ger svaret $-e^{x^2}$.

b.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{n-3}^{n+5} \left(3 + \frac{1}{10^x}\right) dx$$

Lösningstips: Medelvärdessatsen för integraler. Kan användas tack vare "kontinuerlig funktion på kompakt intervall" och med ett $x = \xi$ inom intervallet får man

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \xi \rightarrow \infty}} \underbrace{\left(3 + \frac{1}{10^\xi}\right)}_{f(\xi)} \underbrace{\left(\frac{(n+5) - (n-3)}{b-a}\right)}_{b-a} = 3 \cdot 8 = 24$$

3 p

4. Beräkna kurvlängden för parameterkurvan

$$\begin{cases} x(t) = 5 \cos t \\ y(t) = 5 \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Svar: Integral för kurvlängd hos parameterkurva samt "trigettan" ger längden 10π .

2 p

5. Rätt eller fel? Enbart svaren R eller F räcker i denna uppgift.

- a. Medelvärdessatsen för integraler får inte användas på funktioner som är diskontinuerliga på det aktuella intervallet för då kan det saknas ett lagom stort funktionsvärde $f(\xi)$.

Svar: RÄTT

b. Integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

är divergent.

Svar: FEL (Den är konvergent med svaret 2.)

- c. Analysens Huvudsats berättar att marginaltillväxten hos en integral, då man justerar högergränsen, är lika stor som funktionsvärdet i denna punkt.

Svar: RÄTT

- d. Med hjälp av Analysens Huvudsats kan man härleda Integralkalkylens medelvärdessats.

Svar: FEL (Tvärtom)

- e. En integral är det värde som stängs in mellan alla tillhörande över- och undersummor.

Svar: RÄTT (Förutsatt att integralen är konvergent)

f. Integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

är konvergent.

Svar: FEL (Divergent på grund av nolldivision för primitiv funktion i origo)

g. Med generaliserade integraler utvidgas integral-begreppet från att enbart gälla "på kompakta intervall" till att även kunna gälla på "öppna eller obegränsade intervall".

Svar: RÄTT

h. Med hjälp av följande integral beräknas kurvlängden hos en funktionskurva

$$\int_a^b \sqrt{1 - (f'(x))^2} dx$$

Svar: FEL (Fel tecken)