INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Kontrollskrivning 2024

Envariabelanalys del 2

Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	KTR1
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare, gradskiva
Skrivtid:	2024-02-02 kl 08:00-10:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

---

1. Beräkna följande integraler

a.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

Lösningstips: Lösning med ”Eulers formel för cosinus” eller med formeln ”cosinus för dubbla vinkeln” eller genom ”partiell integration” ger alla tre svaret $\frac{\pi}{4}$.

b.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+(e^x)^2} dx$$

Lösningstips: Substitution $u = e^x$ ger den nya integralen $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+u^2} du$.
Generaliseringen höger gräns hävs, integralen löses och svaret blir $\frac{\pi}{2}$.

4 p

2. Är påståendena nedan Rätt eller Fel? Svara ”RÄTT” eller ”FEL med en motivering”.

a. Medelvärdessatsen för integraler kan tillämpas på följande funktion inom intervallet $x \in [3,\ 5]$:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \quad x \leq 4 \\ x-1 & , \quad x > 4 \end{cases}$$

Svar: FEL; diskontinuiteten i $x = 4$ gör satsen inte får användas då ett ”lagom $f(\xi)$” saknas.

b. Ur Insättningsformeln härleder man Analysens Huvudsats.

Svar: FEL; tvärtom.

c. En översumma och en undersumma till en integrerbar funktion har alltid olika värden.

Svar: FEL; de är lika om funktionen är konstant eller om antalet ”remsor” $n \to \infty$.

d. Med följande integral beräknas kurvlängden hos funktionskurvan $y = f(x)$:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f(x)\big)^2}\, dx$$

Svar: FEL; $f(x)$ skall vara $f'(x)$.

2 p

3. Beräkna kurvlängden för parameterkurvan

$$\begin{cases} x(t) = 7 - 3t \\ y(t) = 11 + 4t \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Lösningstips: Integral för kurvlängd hos parameterkurva eller Pythagoras’ sats mellan startpunkt och slutpunkt (tack vare att kurvan är en rät linje) ger svaret 50 längdenheter.

2 p

4. Beräkna följande integral med hjälp av en översumma:

$$\int_0^2 x^3\,dx$$

Ledning: $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Lösningstips med n stycken "remsor" med bredden $\frac{2}{n}$:

$$S = \left(1 \cdot \frac{2}{n}\right)^3 \frac{2}{n} + \left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^3 \frac{2}{n} + \left(3 \cdot \frac{2}{n}\right)^3 \frac{2}{n} + \cdots + \left(n \cdot \frac{2}{n}\right)^3 \frac{2}{n}$$

$$= \frac{16}{n^4}\left(1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3\right) = \frac{16}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{4(n^4 + 2n^3 + n^2)}{n^4} = 4 + \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2} \to \mathbf{4} \text{ då } n \to \infty$$

2 p

5. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} \sin t^2\,dt - \int_a^x \sin t^2\,dt\right)$$

Lösningstips: Med samma metod som i beviset av Analysens Huvudsats får man med hjälp av Sats 6.2 e) och Medelvärdessatsen för integraler svaret $\sin x^2$

2 p