

Kontrollskrivning 2026

Envariabelanalys del 2

Utbildningskod:	TNIU23
Modul:	KTR1
Institution:	ITN
Max:	12 p
Bonus 2 p:	Vid resultat 8–12 p
Bonus 1 p:	Vid resultat 5–7 p
Lösningar:	Fullständiga med tankegångar och tydligt angivna svar – det är vägen fram till svaret som poängsätts
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall, passare, gradskiva
Skrivtid:	2026-02-10 kl 08:00-10:00
Jour:	Peter Holgersson 0705-19 99 92

1. Beräkna integralen:

$$\int_{-8}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

Lösning:

Man noterar att $x = 0$ inte ingår i funktionens definitionsmängd så integralen måste delas upp i två integraler för att kunna integreras över sammanhängande intervall.

$$\int_{-8}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \int_{-8}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx + \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = |\text{Symmetri}| = 2 \int_0^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx = \dots$$

Generaliseringen i origo hävs med hjälp av gränsvärde så att intervallet blir kompakt och Insättningsformeln får användas:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2 \int_a^8 \frac{1}{x^{2/3}} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} 2[3x^{1/3}]_a^8 = \lim_{a \rightarrow 0^+} 6[\sqrt[3]{x}]_a^8 = 12 - 0 = 12$$

2. Visa med hjälp av över- och undersumma att:

$$\frac{11}{10} < \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx < \frac{26}{10}$$

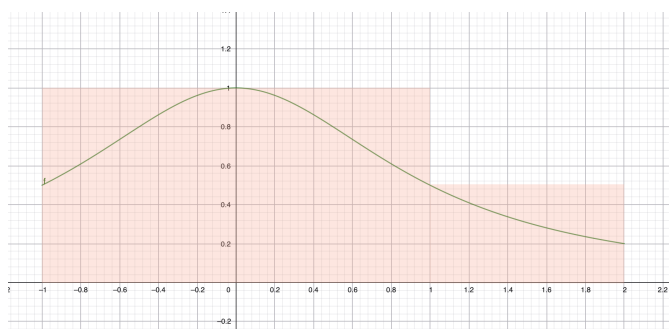
Lösning:

Funktionskurvan skissa med hjälp av värdetabell och är en uppenbart jämn funktion då positiva och negativa x -värden ger samma funktionsvärden. Över- och undersumma med *ett* delintervall $x \in [-1, 2]$ ger tyvärr resultatet

$$\frac{6}{10} = \frac{1}{5} \cdot 3 \leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1 \cdot 3 = \frac{30}{10}$$

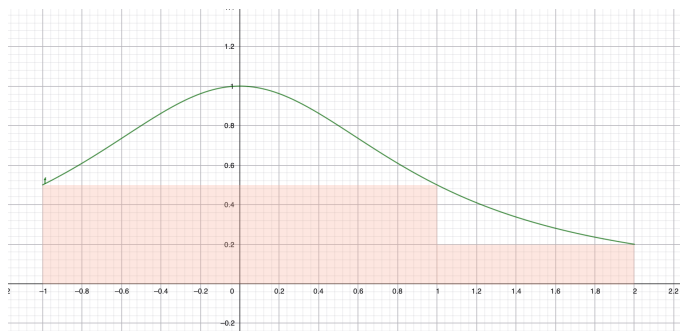
och den olikheten uppfyller inte kravet. Fler delintervall behövs...

Översumma med *tre* delintervall:



$$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{2} = \frac{25}{10}$$

Undersumma med *tre* delintervall:



$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{12}{10}$$

Alltså gäller att

$$\frac{12}{10} \leq \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx \leq \frac{25}{10}$$

vilket uppfyller kravet

$$\frac{11}{10} < \int_{-1}^2 \frac{1}{1+x^2} dx < \frac{26}{10}$$

3. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} e^{-t^2} dt$$

Lösning:

Tack vare att funktionen är kontinuerlig för alla t kan vi göra enligt följande:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} e^{-t^2} dt &= \left[\begin{array}{c} \text{Enligt} \\ \text{Medelvärdessatsen} \\ \text{för integraler med} \\ \xi \in [x, x+h] \end{array} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \underbrace{e^{-\xi^2} ((x+h) - x)}_{=f(\xi)(b-a)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} e^{-\xi^2} h = \lim_{h \rightarrow 0} e^{-\xi^2} = \left[\begin{array}{c} \text{Tack vare} \\ \text{instängning av } \xi \\ \text{inom } \xi \in [x, x+h] \end{array} \right] = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \xi \rightarrow x}} e^{-\xi^2} = e^{-x^2} \end{aligned}$$

2 p

4. Beräkna volymen av den rotationskropp som uppstår då det begränsade området mellan x -axeln, linjen $y = \frac{r}{h}x$ och linjen $x = h$ roterar ett varv runt x -axeln.

Lösning med skivmetoden:

$$\begin{aligned} dV &= \pi y^2 dx = \pi \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx \\ V &= \int_0^h dV = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h} x \right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \left(\frac{h^3}{3} - \frac{0}{3} \right) = \frac{\pi r^2 h}{3} \end{aligned}$$

Alltså volmen av en rak cirkulär kon med radien r och höjden h .

2 p

5. Beräkna integralen:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx$$

Lösning:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{\cos x} dx = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = |\text{"trigettan"}| = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = |\text{variabelbyte}|$$

$$= \left[\begin{array}{l} y = \sin x \\ \frac{dy}{dx} = \cos x \\ dy = \cos x \, dx \\ x = \frac{\pi}{4}, u = 1/\sqrt{2} \\ x = -\frac{\pi}{4}, u = -1/\sqrt{2} \end{array} \right] = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-y^2} \, dy = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{(1+y)(1-y)} \, dy =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{Vi drömmer om} \\ \text{enklar bråk} \end{array} \right| = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y} \right) \, dy = \dots$$

PBU med hjälp av exempelvis handpåläggning:

$$\frac{1}{(1+y)(1-y)} = \frac{A}{1+y} + \frac{B}{1-y}$$

Ekvationen skrivs om på två olika sätt:

$$\frac{1}{1-y} = A + \frac{B(1+y)}{1-y}$$

Insättning av det annars "förbjudna" värdet $y = -1$ i ekvationen ovan visar att $A = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1+y} = \frac{A(1-y)}{1+y} + B$$

Insättning av det annars "förbjudna" värdet $y = 1$ i ekvationen ovan visar att $B = \frac{1}{2}$

Så att:

$$\dots = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{\frac{1}{2}}{1+y} + \frac{\frac{1}{2}}{1-y} \right) \, dy = \frac{1}{2} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{1+y} - \frac{-1}{1-y} \right) \, dy$$

$$= \frac{1}{2} [\ln|1+y| - \ln|1-y|]_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) - \left(\ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \right)$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Frivillig förenkling...

$$= \ln \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}$$

$$\ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1)}{1} = \ln(\sqrt{2} + 1)^2 = 2 \ln(\sqrt{2} + 1) \approx 1.76$$

