

Facit KTR3 och KTR6 TNIU19

KTR3 – 2008

1)

$$z = 4e^{\frac{i\pi}{2}} = 4i \text{ eller } z = 4e^{\frac{i7\pi}{6}} = -2\sqrt{3} - 2i \text{ eller } z = 4e^{-\frac{i\pi}{6}} = 2\sqrt{3} - 2i$$

2)

$$z = 1 \pm 3i \text{ eller } z = \pm 2i$$

3)

- a) V_f = "alla komplexa tal innanför enhetscirkeln i andra och tredje kvadranten"
- b) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = 2 - 2i$
- c) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = -3i$

KTR3 – 2009

1)

$$z = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i \text{ eller } z = 2e^{-\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3} - i \text{ eller } z = 2e^{\frac{i7\pi}{6}} = -\sqrt{3} - i$$

2)

- a) Cirkel med $r = 3$ och centrum i $z = -3 + 2i$
- b) V_f = "alla komplexa tal utanför enhetscirkeln i första och fjärde kvadranten"
- c) T.ex. $f(z) = \frac{i}{z}$

3)

$$z = 1 \pm i \text{ eller } z = \pm 3i$$

KTR3 – 2010

1)

$$z = -3i \text{ eller } z = \pm \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$$

2)

- a) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = -2 + 2i$
- b) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = 1 + 2i$
- c) V_f = "alla komplexa tal innanför och på enhetscirkeln i tredje och fjärde kvadranten"

3) $z = \pm 3i$ eller $z = 1 \pm 2i$

KTR3 – 2011

1)

- a) Den lodräta linjen $x = 2$ för $x = \operatorname{Re} z$
- b) Cirkel med $r = 2$ och centrum i $z = -3i$
- c) $V_f =$ "alla komplexa tal innanför enhetscirkeln i första och fjärde kvadranten"

2)

$$z = 2 \pm 2i \text{ eller } z = 1 \pm i$$

3)

$$y = -x + 4 \text{ för } y = \operatorname{Im} z \text{ och } x = \operatorname{Re} z$$

KTR3 – 2012

1)

$$z = -3 - 2i \pm 3$$

2)

a) $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$

b) $z = -1$ eller $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$

c) Se kurshäftet

3)

$$z = \pm 2i \text{ eller } z = 2 \pm 2i$$

KTR3 – 2013

1)

a) $z = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \pm \frac{3i}{\sqrt{2}}$

b) $z = -3 - 2i \pm 5$

2)

a) $z = -3 - 2i$

b) $z = \pm 2i$ eller $z = \pm 3i$

3)

$$\text{Den räta linjen } y = 2 - x \text{ för } y = \operatorname{Im} z \text{ och } x = \operatorname{Re} z$$

KTR3 – 2014

- 1) $z = -2 - 3i \pm 4i$
- 2) $z = 2i$ eller $z = \pm\sqrt{3} - i$
- 3) Den räta linjen $y = 3 - x$ för $y = \text{Im } z$ och $x = \text{Re } z$

KTR3 – 2015

- 1) $z = \mp \frac{5}{\sqrt{2}} \pm \frac{5i}{\sqrt{2}}$
- 2) $z = -4 - i$ eller $z = -4 - 5i$
- 3)
 - a) Värdemängden = "innanför och på enhetscirkeln i fjärde kvadranten"
 - b) Värdemängden = "innanför och på cirkeln $|z| = 3$ i tredje och fjärde kvadranten"
 - c) Randen av definitionsmängden är enhetscirkel och den avbildas på linjen $\text{Re}(z) = 0$, med andra ord imaginära axeln. Värdemängden blir "hela första och fjärde kvadranten". Notera att "förbjudna värdet" $z = -1$ "avbildas på oändligheten"

KTR3 – 2016

- 1)
 - a) $z_1 = 2$ eller $z_2 = 2 - 6i$
 - b) $z_0 = 1 + i, z_1 = -1 + i, z_2 = -1 - i$ eller $z_3 = 1 - i$
- 2)
 - a) $z^6 = -64$
 - b) Additionssatser som verifieras med hjälp av Eulers första formel och studie av realdel respektive imaginärdel var för sig:
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
- 3)
 - a) $z_{1,2} = \pm 2i$ eller $z_{3,4} = 2 \pm 2i$

KTR6 – 2017

1)

a) $z_1 = -2 - i$ eller $z_2 = -2 - 5i$

b) $z = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$ eller $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$ eller $z_3 = \pm i$

2)

$z = \pm i$ eller $z = 2 \pm 3i$

3)

a) $x^2 + y^2 = 9$ med $x = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im}(z)$ som motsvarar en cirkel med radien 3 och centrum i origo

KTR6 – 2018

1)

a) $z = \pm 3i$ eller $z = \pm i$

b) $z = \mp \frac{6}{\sqrt{2}} \pm \frac{6}{\sqrt{2}} i$ vilket också kan skrivas som $z = \mp 3\sqrt{2} \pm 3\sqrt{2}i$

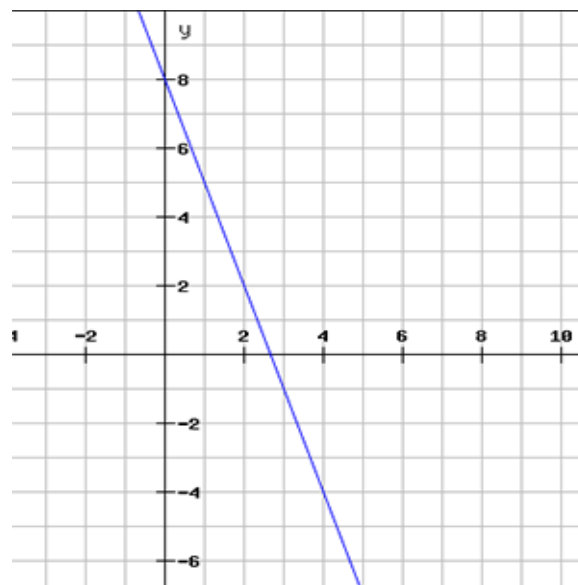
2)

a) Innanför enhetscirkeln i andra och tredje kvadranten inklusive randen

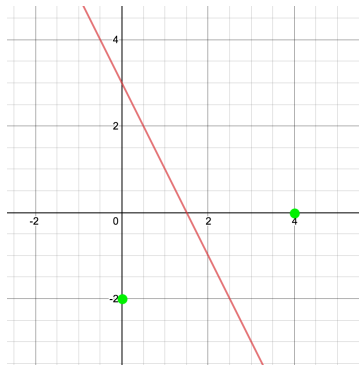
b) Första och fjärde kvadranten inklusive randen – alltså höger halva av komplexa talplanet

3)

a) Den räta linjen $y = 8 - 3x$ om $x = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im}(z)$



1) Den räta linjen $y = -2x + 3$ om $x = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im}(z)$



2)

$$e^{i(u+v)} = e^{iu}e^{iv}$$

$$\Leftrightarrow \cos(u+v) + i \sin(u+v) = (\cos u + i \sin u)(\cos v + i \sin v)$$

$$\Leftrightarrow \cos(u+v) + i \sin(u+v) = \cos u \cos v + i \sin v \cos u + i \sin u \cos v - \sin u \sin v$$

$$\Leftrightarrow \cos(u+v) + i \sin(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v + i(\sin u \cos v + \cos u \sin v)$$

Realdelen ger nu:

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

Imaginärdelen ger nu:

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$$

3)

$$a) f(z) = \frac{1}{z^2} = \frac{1}{(re^{i\theta})^2} = \frac{1}{r^2} e^{i(-2\theta)}$$

- Som synes inverteras beloppet (i kvadrat) så att belopp större än 1 blir mindre än 1 och man får funktionsvärden **innanför enhetscirkeln**.
- Tidigare argument $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ byter tecken och fördubblas så att argumenten $\frac{\pi}{2} \rightarrow -\pi$ och $\pi \rightarrow -2\pi$. Alltså får man funktionsvärden i **första och andra kvadranten**

b) Några exempel på insatta punkter som bekräftar slutsatsen i a):

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} = 1$$

$$f(i) = \frac{1}{i^2} = -1$$

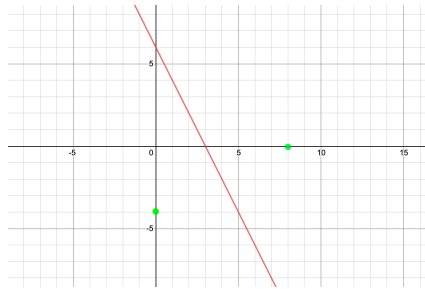
$$f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2} = e^{-i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$f(-1+i) = \frac{1}{(-1+i)^2} = \frac{1}{-2i} = \frac{2i}{-2i \cdot 2i} = \frac{2i}{-4i^2} = \frac{i}{2}$$

”Oändligheten avbildas på noll”

1)

- a) Kvadratkomplettering ger svaren $z_1 = -3 - 2i$ eller $z_2 = -3 - 6i$
 b) Polär form och de Moivre ger svaren $z_0 = 4i$, $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$ eller $z_2 = 2\sqrt{3} - 2i$

2) Omskrivning med $z = x + iy$ ger den räta linjen $y = -2x + 6$ om $x = \operatorname{Re}(z)$ och $y = \operatorname{Im}(z)$ 

3)

$$a) f(z) = iz^2 = re^{i\frac{\pi}{2}}(re^{i\theta})^2 = r^2e^{i(2\theta+\frac{\pi}{2})}$$

- Som synes kvadreras beloppet så att belopp större än och lika med 1 blir större än och lika med 1 och man får funktionsvärden **utanför enhetscirkeln**.
- Tidigare argument $\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ fördubblas och adderas med $\frac{\pi}{2}$ så att argumenten $\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2}$ och $\pi \rightarrow \frac{5\pi}{2}$. Alltså får man funktionsvärden i **fjärde och första kvadranten**

b) Några exempel på insatta punkter som bekräftar slutsatsen i a):

$$f(-1) = i(-1)^2 = i$$

$$f(i) = i^3 = -i$$

$$f\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right) = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^2 = e^{i2\pi} = 1$$

$$f(-1 + i) = i(-1 + i)^2 = i(-2i) = 2$$

"Oändligheten avbildas på oändligheten"