

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2011

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I-III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I-III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1-KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Inga
Skrivtid: 2012-01-11, kl. 08:00-13:00
Visning: Peter Holgerssons kontor i Spetsen, fredagen 13 jan kl. 15:30, tel. 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Utveckla fullständigt:

$$(x - 2)^5$$

$$\text{Svar: } x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

- b) Bestäm resten vid polynomdivisionen:

$$\frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 6}{x^2 + 2x}$$

$$\text{Svar: } 28x - 6$$

- c) Bestäm eventuella reella lösningar till ekvationen:

$$x + 3 + \sqrt{9x + 9} = 0$$

$$\text{Svar: Lösning saknas}$$

3 p

2. Dela upp uttrycket i partialbråk:

$$\frac{5x^2 + 5x + 11}{(x^2 + 3)(x + 2)}$$

$$\text{Svar: } \frac{2x+1}{x^2+3} + \frac{3}{x+2}$$

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a) $(1 - \tan x)(3 + 6 \sin x) = 0$

$$\text{Svar: } x = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ eller } x = \frac{7\pi}{6} + n2\pi \text{ eller } x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi$$

b) $4 \sin^2 x = 3$

$$\text{Svar: } x = \pm \frac{\pi}{3} + n\pi$$

c) $2 \ln x - \ln(x + 6) = 0$

$$\text{Svar: } x = 3$$

3 p

4. Bestäm $f^{-1}(x)$ och skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem:

a) $y = f(x) = \ln(-x)$

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = -e^x, x \in]-\infty, \infty[\text{ skissas...}$$

b) $y = f(x) = -x^2, x \in]-\infty, 0]$

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = -\sqrt{-x}, x \in]-\infty, 0] \text{ skissas...}$$

c) $y = f(x) = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = \arcsin x, x \in [-1, 0] \text{ skissas...}$$

3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen $z^4 + 10z^2 + 9 = 0$

Svar: Reella rötter $z = \pm 3i$ eller $z = \pm i$

b) Lös ekvationen $z^3 = -125i$

Svar: $z = 5i$ eller $z = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$

c) Lös ekvationen $|z - 5 + 4i| = 4$

Svar: Alla punkter i det komplexa talplanet som uppfyller $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 16$ och därmed finns längs en cirkel med radien $r = 4$ och centrum i punkten $z = 5 - 4i$

3 p

6. Låt $f(z) = \frac{1}{z}$ vara definierad enligt nedanstående definitionsmängder. Bestäm på valfritt sätt värdemängden då definitionsmängden är:

a) $|z| = 1$

Svar: Enhetscirkeln $|z| = 1$

b) $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$

Svar: Linjen $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ förutom origo, vilket motsvarar $y = x$ för $z = x + iy$.

c) $\operatorname{Re} z = 1$

Svar: Alla punkter i det komplexa talplanet som uppfyller $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ och därmed finns längs en cirkel med radien $r = \frac{1}{2}$ och centrum i punkten $z = \frac{1}{2}$

3 p