

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Ordinarie tentamen för kursen HT 2013

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I-III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I-III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg G på tillhörande KTR1-KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, linjal och cirkelmall eller passare
Skrivtid: 2013-10-30, kl 08:00-13:00
Examinator: Peter Holgersson, tel. 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försätsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$\sqrt{x-2} = 4-x$$

Svar: Kvadrering ger två förslag på rötter varav den ena $x = 3$ är korrekt.

- b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ x - 2y + z = 0 \\ -2x + 2y - z = -1 \end{cases}$$

Svar: Genom successiv elimination får man $x = 1$, $y = 2$ och $z = 3$

- c) Lös olikheten

$$\frac{x^2 + 7x + 10}{x - 3} \geq 0$$

Svar: Faktorisering och teckenstudium ger $x \in [-5, -2] \cup]3, \infty[$

3 p

2. Lös ekvationen

$$x|x-2| - 3 = 0$$

Svar: $x = 3$

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$\tan^2 x - \tan x = 0$$

$$\text{Svar: } x = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ eller } x = n\pi \text{ då } n \in \mathbb{Z}$$

- b) Förenkla

$$2 \lg 300 - (\lg 2 + \lg 450)$$

Svar: 2

- c) Förenkla

$$\ln 3 - \ln 3e + \ln 5e^2 - \ln 5$$

Svar: 1

3 p

4. Låt $y = f(x) = \ln(1 - x)$.

- a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

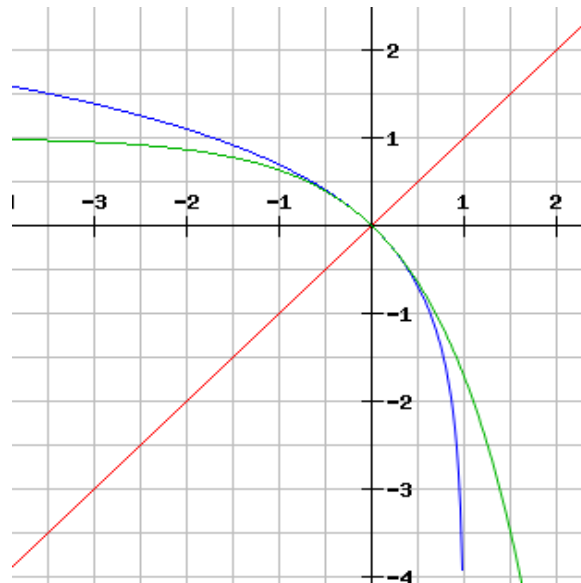
$$\text{Svar: } D_f \in]-\infty, 1[\text{ och } V_f \in]-\infty, \infty[$$

- b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

$$\text{Svar: } f^{-1}(x) = 1 - e^x \quad D_{f^{-1}} \in]-\infty, \infty[\text{ och } V_{f^{-1}} \in]-\infty, 1[$$

- c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.

Svar: Notera att korrekt skissade grafer tydligt skall begränsas av sina definitionsmängder enligt ovan...



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Bestäm z^6 om $z = 1 + \sqrt{3}i$

Svar: $z^6 = 64$

b) Lös ekvationen

$$2z + 10i = 3\bar{z} + 3$$

Svar: $= -3 - 2i$

c) Lös ekvationen och svara på formen $a + bi$ (rektangulär form)

$$3z^4 = -48$$

Svar: $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$ eller $z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$

3 p

6. Lös ekvationen $z^2 - (4 - 2i)z - 9 + 12i = 0$

Svar: Kvadratkomplettering och ersättning med $z = a + bi$ ger

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 12 \\ 2ab = -16 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20 \end{cases}$$

genom studie av realdel, imaginärdel och absolutbelopp hos höger- och vänsterled.

Insättning av $a = \pm 4$ och $b = \mp 2$ (OBS olika tecken på a och b) ger därefter $= 2 - i \pm 4 \mp 2i$ vilket motsvarar $z_1 = 6 - 3i$ eller $z_2 = -2 + i$

3 p