

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Ordinarie tentamen för kursen HT 2014

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I–III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I–III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1–KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Skrivdon, passare och linjal
Skrivtid: 2014-10-27, kl 08:00–13:00

Del I

1. Vid betyg 3 på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Skriv i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös ekvationen

$$|2x - 4| = |5 - x|$$

Svar: $x_1 = -1, x_2 = 3$

- b) Lös olikheten

$$\frac{3}{x} \geq x - 2$$

Svar: $x \in]-\infty, -1] \cup]0, 3]$

- c) Utveckla

$$(x - 2y)^5$$

Svar: Binomialutveckling ger $x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$

3 p

2. Partialbråksuppdelning

$$\frac{5x^3 + 5x^2 + x + 2}{x^4 + x^2}$$

Svar: Ansatsen $\frac{5x^3+5x^2+x+2}{x^4+x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x}$ ger $\frac{4x+3}{x^2+1} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}$

3 p

Del II

3. Vid betyg 3 på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Skriv i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a. $\ln x^6 - \ln 16 = \ln x^4$

Svar: $x = \pm 4$

b. $\sin 2x - \cos x = 0$

Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

c. $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

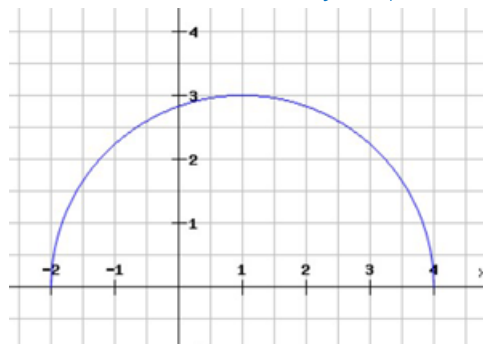
Svar: $x = \frac{\pi}{2} + n2\pi$ eller $x = \frac{\pi}{6} + n2\pi$ eller $x = \frac{5\pi}{6} + n2\pi$, $n \in \mathbb{Z}$

3 p

4. Låt $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ och $g(x) = x - 1$

Bestäm den sammansatta funktionen $f(g(x))$ med tillhörande definitionsmängd och värdemängd samt skissa dess graf.

Svar: $y = f(g(x)) = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$ med $D_f = [-2, 4]$ och $V_f = [0, 3]$
Kvadrering ger $y^2 = 9 - (x - 1)^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 9$ som är cirkelns ekvation men endast övre halvan är av intresse för $y = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$:



3 p

Del III

5. Vid betyg 3 på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Skriv i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Lös ekvationerna

a) $2z^2 + (12 + 8i)z - 40 + 24i = 0$

Svar: $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -8 - 2i$

b) $iz^3 = -125$

Svar: De Moivres formel ger $z_0 = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$, $z_1 = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$ eller $z_2 = -5i$

c) $2z + \bar{z} = 12 + 6i$

Svar: $z = x + iy$ ger $z = 4 + 6i$

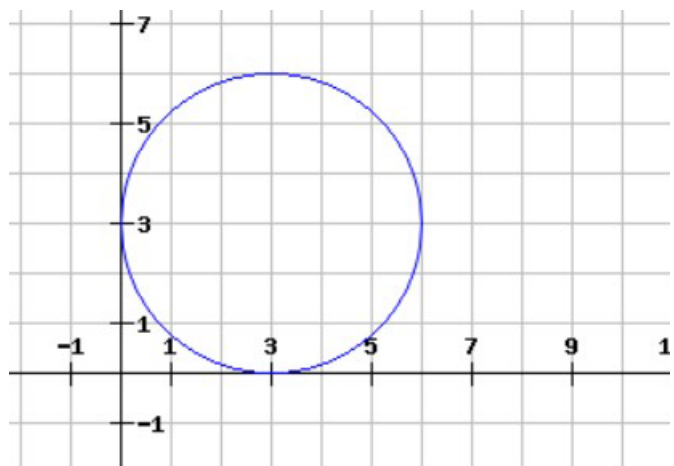
3 p

6. Lös ekvationen

$$|z - 3 + 6i| = 3|z - 3 - 2i|$$

och markera lösningen i komplexa talplanet

Svar: Lösningen består av oändligt många punkter vilka bildar en cirkel med ekvationen $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$ för $x = \operatorname{Re} z$ och $y = \operatorname{Im} z$



3 p