INSTITUTIONEN FÖR TEKNIK OCH NATURVETENSKAP
Linköpings Tekniska Högskola
Peter Holgersson

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2015

Kurskod:	TNIU19	
Examination:	TEN1	
Max:	18 p	
Betyg 5:	≥ 15 p	
Betyg 4:	≥ 12 p	och minst 3 p på respektive Del I–III
Betyg 3:	≥ 9 p	och minst 2 p på respektive Del I–III
Bonus:	Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg G på tillhörande KTR1–KTR3	
Lösningar:	Fullständiga med tydligt angivna svar	
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, gradskiva, kurvmall	
Skrivtid:	2016-01-07, kl 08:00–13:00	
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92	

Del I

1. *Vid betyg 3 på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

a) Lös ekvationen

$$\sqrt{2-x} = x+4$$

Lösningstips: Kvadrering ger ekvation med två rötter varav den ena $x = -2$ duger

b) Lös ekvationen

$$|3x-6| = x+2$$

Lösningstips: Två fall ger ekvationer som båda har godkända lösningar $x = 1$ eller $x = 4$

c) Lös olikheten

$$x^2 + 14 < 9x$$

Lösningstips: Faktorisering (nollprodukt) ger olikheten $(x-2)(x-7) < 0$ som teckenstuderas och man får svarsintervalet $x \in]2,7[$

3 p

2. Partialbråksuppdela

$$\frac{5x^3 + 11x^2 + 9x + 9}{(x^2+1)(x+1)^2}$$

Lösningstips: Exempelvis ansatsen $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1}$ ger ett ekvationssystem med lösning $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ och $D = 4$ som leder till partialbråken $\frac{x+2}{x^2+1} + \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{4}{x+1}$

3 p

Del II

3. *Vid betyg 3 på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.*

Lös ekvationerna

a) $\sin^2 x + \cos 2x = 0$

Lösningstips: Trigettan och "cosinus för dubbla vinkeln" ger ekvation med lösningarna $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$

b) $10^{2x} - 11 \cdot 10^x + 10 = 0$

Lösningstips: Variabelskiftet $10^x = t$ ger ekvation med lösningarna $t = 1$ eller $t = 10$ som sedan motsvarar $x = 0$ eller $x = 1$

c) $(1 - \ln x)(e^x - 1) = 0$

Lösningstips: Ekvationen är redan en nollprodukt och faktorerna nollställs för $x = e$ eller $x = 0$

3 p

4. Låt $y = f(x) = \sqrt{9 - x}$.

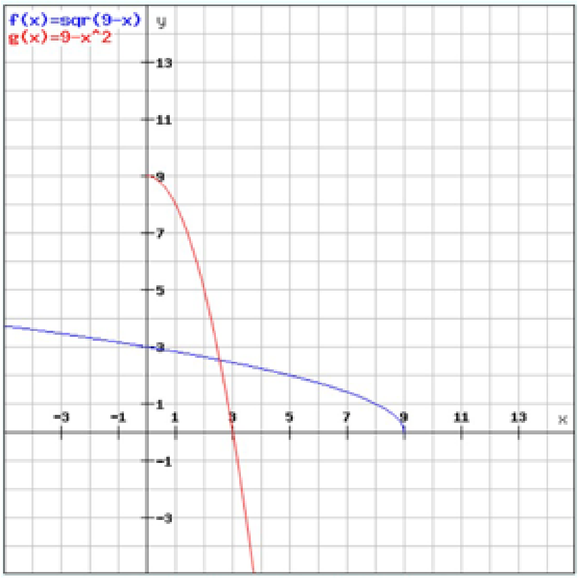
a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $D_f =]-\infty, 9]$ och $D_f = [0, \infty[$

b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = 9 - x^2$ med $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ och $V_{f^{-1}} =]-\infty, 9]$

c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.



3 p

Del III

Vid betyg 3 på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

5.

a) Beräkna $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9$

Lösningstips: Polär form ger $\left(1+\sqrt{3}i\right)^9 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^9 = 2^9 e^{i3\pi} = 512(-1) = -512$

b) Lös ekvationen

$$|z-4i| = |z-2-2i|$$

Lösningstips: Sambanden $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$ och $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ ger ekvationen $\sqrt{x^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$ som har lösningarna $y = x+2$, alltså den räta linjen $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)+2$ genom det komplexa talplanet

c) Lös ekvationen

$$z^4-2z^3+9z^2-8z+20 = 0$$

Lösningstips: Roten $z = 2i$ gissas och eftersom att ekvationen har reella koefficienter måste även $z = -2i$ vara en rot. Polynomdivision med $(z-2i)(z-2i) = z^2+4$ ger den unika faktoriseringen av polynomet och den sista faktorn z^2-2z+5 ger de återstående rötterna $z = 1 \pm 2i$

3 p

6.

Visa med hjälp av Eulers formel att

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

Lösningstips: $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 = \cdots = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}$

$$= \cdots = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 4x}{8}$$

3 p