

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT 2016

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I–III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I–III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1–KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Inga
Skrivtid: 2017-01-05, kl 08:00–13:00

Del I

1. Vid betyg G på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a) Lös olikheten

$$x^3 - 10x^2 + 31x - 30 \leq 0$$

Rotgissning och polynomdivision ger $x \in]-\infty, 2] \cup [3, 5]$

- b) Lös ekvationen

$$|x + 2| - |2 - x| = 0$$

Tre fall ger en lösning $x = 0$

- c) Utveckla

$$(x - 2)^5$$

Binomialutveckling ger $x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

3 p

2. Partialbråksuppdelning

$$\frac{2x^3 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$$

Lämplig ansats $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}$ ger $\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Låt $y = f(x) = \sqrt{x+2}$.

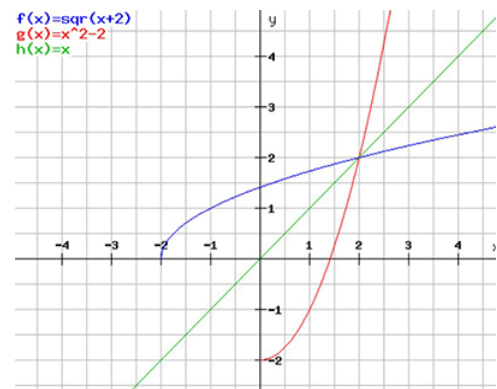
- a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $D_f = [-2, \infty[$ och $V_f = [0, \infty[$

- b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = x^2 - 2$, $D_{f^{-1}} = [0, \infty[$ och $V_{f^{-1}} = [-2, \infty[$

- c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.



3 p

4.

Lös ekvationerna

a) $1 + \cos 2x = \cos^2 x$

Sambandet "cosinus för dubbla vinkeln" ger $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

b) $\ln(3 - x) - \ln(x - 1) = 0$

Med hjälp av andra logaritmlagen får man svaret $x = 2$

c) $\cos\left(\arcsin \frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Med hjälp av enhetscirkeln får man $x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen $z^2 - (2 - 2i)z + 4 - 2i = 0$

Kvadratkomplettering ger $z = 1 - i \pm 2i$

b) Lös ekvationen $4z + 21i = 3\bar{z} + 5$

Realdel och imaginärdel var för sig ger $z = 5 - 3i$

c) Beräkna z^{18} om $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Polär form med $z = 1e^{i\frac{\pi}{6}}$ ger potensen $z^{18} = 1^{18}e^{i3\pi} = -1$

3 p

6.

a) Verifiera sambandet

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

med hjälp av Eulers formler för $\sin x$ och $\cos x$.

Ledning:

$$HL = 2 \sin x \cos x = 2 \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \dots = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} = \sin 2x = VL$$

b) Verifiera sambandet

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

med hjälp av Eulers formler för $\sin x$ och $\cos x$.

Ledning:

$$\begin{aligned} HL = \cos^2 x - \sin^2 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^2 = \dots = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} \\ &= \cos 2x = VL \end{aligned}$$

3 p