

Tentamen inom Matematisk Grundkurs

Kompletterande tentamen 2 för kursen HT 2016

Kurskod: TNIU19
Examination: TEN1
Max: 18 p
Betyg 5: ≥ 15 p
Betyg 4: ≥ 12 p och minst 3 p på respektive Del I–III
Betyg 3: ≥ 9 p och minst 2 p på respektive Del I–III
Bonus: Uppgifterna 1, 3 och/eller 5 tillgodoräknas vid betyg 3 på tillhörande KTR1–KTR3
Lösningar: Fullständiga med tydligt angivna svar
Hjälpmedel: Inga
Skrivtid: 2017-08-22, kl 08:00–13:00
Jour: Peter Holgersson, 0705-19 99 92

Del I

1. Vid betyg G på KTR1 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

- a. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x - y + z = 5 \\ 2x + y - 2z = -5 \\ x + y - z = -1 \end{cases}$$

Svar: $x = 1, y = 3$ och $z = 5$

- b. Lös ekvationen

$$\sqrt{3-x} = x - 1$$

Lösningstips: Kvadrering ger ekvation med två rötter varav den ena $x = 2$ duger

- a) Partialbråksuppdelning

$$\frac{7x + 10}{(x + 3)(x + 2)}$$

Rätt ansats följt av ekvationssystem eller handpåläggning ger $\frac{11}{x+3} + \frac{-4}{x+2}$

2.

Lös olikheten

$$x + 1 \leq \frac{x - 1}{x + 5}$$

Svar: $-\infty < x < -5$ eller $-3 \leq x \leq -2$

3 p

Del II

3. Vid betyg G på KTR2 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

Låt $y = f(x) = \ln(x - 3)$

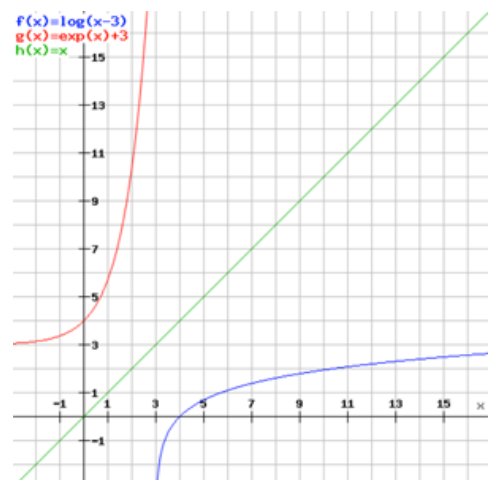
a) Ange funktionens definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $D_f =]3, \infty[$ och $V_f =]-\infty, \infty[$

b) Bestäm inversen $f^{-1}(x)$ och ange dess definitionsmängd och värdemängd.

Svar: $f^{-1}(x) = e^x + 3$, $D_{f^{-1}} =]-\infty, \infty[$ och $V_{f^{-1}} =]3, \infty[$

c) Skissa kurvorna till $f(x)$ och $f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem.



3 p

4.

Lös ekvationerna

a) $\sin 2x = 2 \cos^2 x$

Sambandet "sinus för dubbla vinkeln" följt av faktorisering ger $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ eller $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ då $n \in \mathbb{Z}$

b) $(\ln(x - 1))^2 - \ln(x - 1) - 2 = 0$

Med hjälp av substitution $t = \ln(x - 1)$ får man två rötter varav $x = e^2 + 1$ eller $x = \frac{1}{e} + 1$

c) $(1 - \tan x)(\pi - \arccos x)(1 + \ln|x|) = 0$

Ekvationen redan faktorerad och man läser av rötterna

$$x = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ då } n \in \mathbb{Z} \text{ eller } x = -1 \text{ eller } x = \frac{1}{e}$$

3 p

Del III

5. Vid betyg G på KTR3 erhåller man automatiskt 3 p på denna bonusuppgift. Ange i så fall "Bonus" istället för ett kryss i rutan för denna uppgift på försättsbladet.

a) Lös ekvationen

$$z^2 - (2 + 2i)z + 4 + 2i = 0$$

Kvadratkomplettering ger $z = 1 + i \pm 2i$

b) Lös ekvationen

$$3z^3 - 24i = 0$$

De Moivre ger $z = -2i$ eller $z = \pm\sqrt{3} + i$

c) Beräkna z^{15} om $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$

Polär form med $z = 1e^{-i\frac{\pi}{6}}$ ger potensen $z^{15} = 1^{15}e^{-i\frac{5\pi}{2}} = -i$

3 p

6. Lös ekvationen som har en rot $z = -2 - i$

$$z^4 + 6z^3 + 15z^2 + 18z + 10 = 0$$

Faktorer till konjugerade rötter, polynomdivision
och kvadratkomplettering ger de fyra rötterna

$$z = -2 \pm i \text{ eller } z = -1 \pm i$$

3 p