Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Kompletterande tentamen 1 för kursen HT2013

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, kurvmall			
Skrivtid:	2014-04-23, kl. 08:00–13:00			

1.

a) Bestäm $\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx$ (1 p)

Lösningstips:

Den primitiva funktionen bestäms enligt

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}}\,dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 4\sqrt{x} + C$$

b) Bestäm $\int e^x \sin x\,dx$ (1 p)

Lösningstips:

Två varv partiell integration ger på nytt den ursprungliga integralen som därefter ut:

$$\int e^x \sin x\,dx = \cdots = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$$

c) Bestäm $\int 2 \arctan x\,dx$ (1 p)

Lösningstips:

Partiell integration med derivering av $\arctan x$ ger:

$$\int 2 \arctan x\,dx = 2x \arctan x - \ln(1 + x^2) + C$$

2.

a) Visa att $f(x) = \frac{1}{x-1}$ har invers. (1 p)

Lösningstips:

Eftersom att inversen går att fastställa entydigt till

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1$$

så existerar den förstås.

b) Härled Eulers formel för $\sin x$ med hjälp av Eulers första formel:

$e^{ix} = \cos x + i \sin x$ (1 p)

Lösningstips:

Differensen mellan följande två uttryck

$$z = e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\bar{z} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

ger ett uttryck som man enkelt kan lösa ut $\sin x$ ur.

c) Förenkla uttrycket $\arctan 2 + \arctan 3$. (1 p)

Lösningstips:

Man söker summan av två vinklar enligt:

$$\arctan 2 + \arctan 3 = u + v$$

Man inser att $u \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ och $v \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ och därför att $(u + v) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Additionssatsen ger

$$\tan\Big(\underbrace{\arctan 2 + \arctan 3}_{andra\ kvadranten}\Big) = \tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$$

med vald lösning

$$\begin{cases} u + v = -\frac{\pi}{4} + n\pi \\ (u + v) \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\end{cases} \Leftrightarrow \quad u + v = \frac{3\pi}{4}$$

3.

Låt $f(x) = \frac{x^4-2x^2+1}{x^3}$

a) Bestäm samtliga asymptoter. (1 p)

Lösningstips:

Polynomdivision ger

$$f(x) = x - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$$

med sned asymptot

$$y = x$$

Gränsvärde runt origo ger lodrät asymptot

$$x = 0$$

b) Bestäm samtliga stationära punkter. (1 p)

Lösningstips:

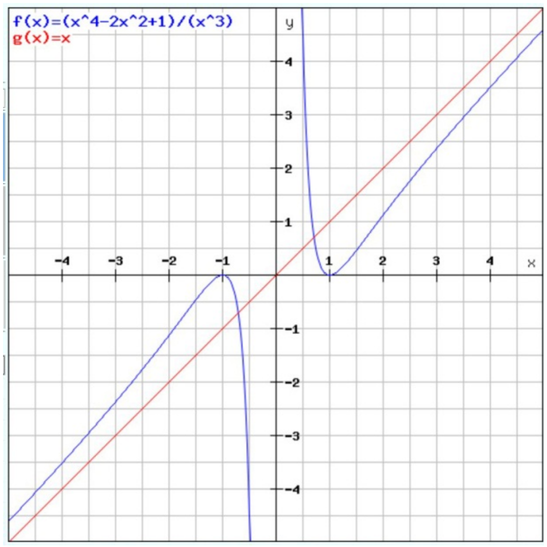
$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4}$$

Derivatans nollställen bestäm genom ledvis multiplikation med x^4. Stationära punkter är $x = \pm 1$ (se bild nedan).

c) Skissa grafen. (1 p)

Lösningstips:

Teckenstudium ger



4.

a) Låt funktionen $f(x)$ vara kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och deriverbar på åtminstone intervallet $]a, b[$.

Vad säger då *Medelvärdessatsen för derivator* om $f(x)$? (1 p)

Lösningstips:

Se sats 4.10 i läroboken

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för $x \in \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x-8}{x-2} & \text{då } x \neq 2 \\ A & \text{då } x = 2 \end{cases}$$ (2 p)

Lösningstips:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x + 4)(x - 2)}{x - 2} = 6$$

ger utvidgningen $A = 6$ som gör $f(x)$ kontinuerlig för alla reella x -värden.

5.

Låt $f(x) = 3x^{\frac{1}{3}} - x$

a) Undersök med hjälp av derivator vilka egenskaper $f(x)$ har i origo. (1 p)

Lösningstips:

- $f(x)$ är definierad för $x = 0$ men det är däremot inte $f'(x) = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} - 1$.
  Därmed är $x = 0$ en typ av singulär punkt – i detta fall en punkt som ingår i funktionens definitionsmängd men inte i derivatornas definitionsmängder.
- $f''(x) = -\frac{2}{3x^{\frac{5}{3}}}$ är förstås inte heller definierad för $x = 0$ men skiftar här tecken från positivt värde (konvex funktion) till negativt värde (konkav funktion). Alltså är $x = 0$ en inflexionspunkt.

b) Bestäm största och minsta värdet för $f(x)$ då $x \in [-8, 8]$. (2 p)

Lösningstips:

Extremvärden finner man bland (1) ändpunkter, (2) stationära punkter och (3) singulära punkter. För just denna funktion är x-värdena -8, -1, 0, 1 och 8 intressanta att studera. Minsta värde fås genom $f(-1) = f(8) = -2$ och största värde genom $f(1) = f(-8) = 2$.

6.

Låt $f(x) = \begin{cases} 2 + x\sin\frac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ 2 & \text{för } x = 0 \end{cases}$

Undersök om $f(x)$ är deriverbar då $x = 0$ (3 p)

Lösningstips:

Visserligen är $f(x)$ kontinuerlig i $x = 0$ ty $\lim\limits_{x\to 0}\left(2 + \underbrace{x\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{begr}}_{\to 0}\right) = 2$ men detta räcker ej för att $f(x)$ dessutom ska vara deriverbar i $x = 0$.

Använd derivatans definition i punkten $x = 0$ och se att gränsvärde saknas – därmed är inte $f(x)$ deriverbar då $x = 0$.

7.

Låt $f(x) = \begin{cases} e^x + x + 1 \text{ då } x > 0 \\ kx + m \text{ då } x \leq 0 \end{cases}$

a) Bestäm k och m så att $f(x)$ blir deriverbar för alla $x \in \mathbb{R}$. (2 p)

Lösningstips:

Derivatan studeras och man inser att $f'(0) = 2$ måste gälla för den räta linjen – alltså $k = 2$. Enpunktsformeln eller liknande ger sedan $m = 2$.

b) Bestäm $(f^{-1})'(e + 2)$ (1 p)

Lösningstips:

Derivering ger:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + 1 & \text{då } x > 0 \\ 2 & \text{då } x \leq 0 \end{cases}$$

$f(x)$ är strängt växande eftersom att $f'(x) \geq 2$ och man noterar att

$f(1) = e + 2$. Symmetri ger sedan att

$$(f^{-1})'(e + 2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{e + 1} \approx 0.27$$