

# Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

---

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsninganteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsninganteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

# Tentamen inom Envariabelanalys 1

*Ordinarie tentamen för kursen HT2014*

Examination: TEN 1, TNIU22

Max: 21 p                      betyg 5:  $\geq 16$  p                      betyg 4:  $\geq 12$  p                      betyg 3:  $\geq 8$  p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1

Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar

Hjälpmedel: Skrivdon, linjal, kurvmall

Skrivtid: 2015-01-14, kl. 08:00–13:00

---

1.

a) Bestäm

$$\int \frac{4x + 3}{1 + x^2} dx$$

$$\text{Lösning: } \int \frac{4x+3}{1+x^2} dx = 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 3 \int \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \ln(1+x^2) + 3 \arctan x + C$$

b) Bestäm

$$\int x^2 \sin 3x dx$$

$$\text{Ledning: Upprepad partiell integration ger } -\frac{x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2x \sin 3x}{9} + \frac{2 \cos 3x}{27} + C$$

c) Bestäm

$$\int e^{x^2} 4x dx$$

$$\text{Lösning: } \int e^{x^2} 4x dx = 2 \int e^{x^2} 2x dx = \left| \begin{array}{l} \text{Kedjeregeln} \\ \text{baklänges} \end{array} \right| = 2e^{x^2} + C$$

2. Låt  $f(x) = \frac{x^3+4}{2x^2}$

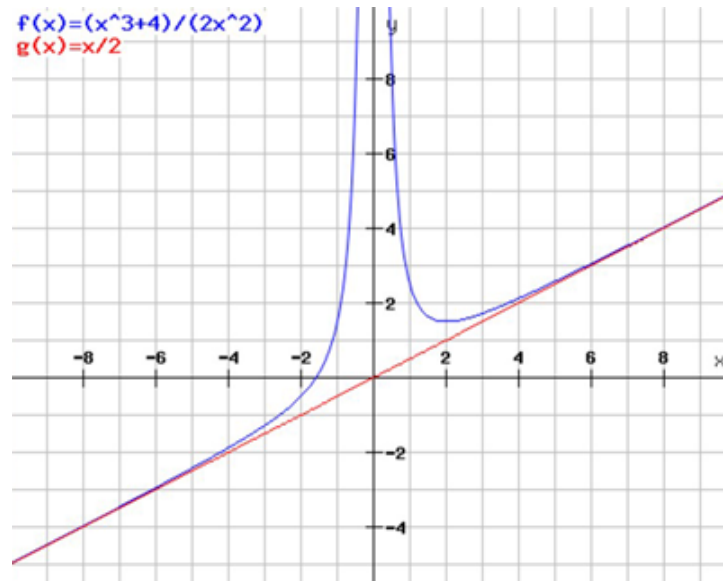
a) Bestäm samtliga asymptoter.

Ledning: Gränsvärdesstudier ger asymptoter  $x = 0$  och  $y = \frac{x}{2}$

b) Bestäm samtliga stationära punkter.

Ledning: Teckenstudium av derivat ger en lokal minimipunkt  $x = 2$

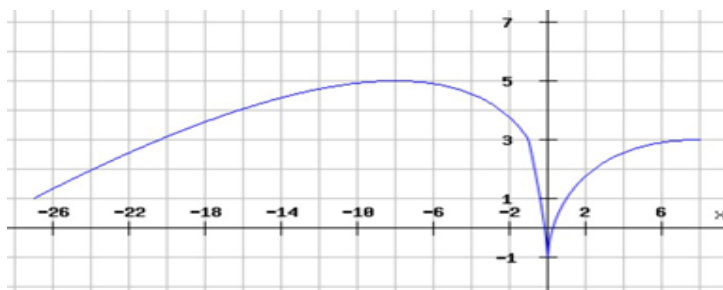
c) Skissa grafen.



3 p

3. Bestäm största och minsta värde för  $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - |x + 1|$  inom det slutna intervallet  $x \in [-27, 8]$

Ledning: Tre ändpunkter, två stationära punkter och två singulära punkter studeras. Av dessa sju sammanfaller några så i praktiken blir det fem olika punkter. Största värde = 5 i stationära punkten  $x = -8$  och minsta värde = -1 i singulära punkten  $x = 0$  (derivata saknas i denna punkt)



3 p

4. Låt  $f(x) = \sin x + \cos x + 3x$

a) Visa att  $f(x)$  är strängt växande

Ledning: Man visar exempelvis att förstaderivatan är positiv för alla  $x$ -värden

b) Bestäm inversens derivata  $(f^{-1})'(3\pi - 1)$

Ledning: Symmetri i  $y = x$  utnyttjas hos funktion och invers. Eftersom att just  $f(\pi) = 3\pi - 1$  beräknas  $f'(\pi) = 2$  och symmetri ger att  $(f^{-1})'(3\pi - 1) = \frac{1}{2}$

3 p

5.

a) Visa med hjälp av invers att  $f(x) = \arcsin x$  har derivatan

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ledning:

$$y = \arcsin x$$

Invers ger

$$\sin y = \sin(\arcsin x) \Leftrightarrow \sin y = x$$

Ledvis derivering med avseende på  $x$  ger

$$\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Alltså gäller att

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Bestäm  $f'(x)$  för  $f(x) = e^{\sin^2 3x}$

Ledning: Kedjeregeln ger  $f'(x) = e^{(\sin 3x)^2} \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 6 \sin 3x \cos 3x e^{\sin^2 3x}$

3 p

6.

a) Visa med hjälp av derivatans definition att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 8x & \text{för } x \geq 2 \\ x^3 + 12 & \text{för } x < 2 \end{cases}$$

är deriverbar i  $x = 2$

Ledning:  $(2) = 12$  och derivatans definition ger för denna punkt lika värde från båda hållen:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^3 + 12) - (2^2 + 8 \cdot 2)}{x - 2} = \dots = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2 + 8x) - (2^2 + 8 \cdot 2)}{x - 2} = \dots = 12$$

b) Visa med hjälp av derivatans definition att  $(x) = e^{x^2}$  har derivatan  $f'(x) = 2xe^{x^2}$

Lösning:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(x+h)^2} - e^{x^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+2xh+h^2} - e^{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}(e^{2xh+h^2} - 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}(e^{h(2x+h)} - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}(e^{h(2x+h)} - 1)(2x+h)}{h(2x+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h)e^{x^2} \underbrace{\frac{(e^{h(2x+h)} - 1)}{h(2x+h)}}_{\rightarrow 1} = 2xe^{x^2}$$

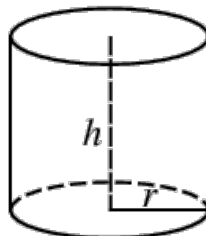
Notera att denna derivata baklänges ger primitiv funktion i uppgift 1 c)

3 p

7. En tunna med formen av en rak cirkulär cylinder skall tillverkas av  $1 \text{ m}^2$  plåt som skall räcka till två cirkulära bottenytor och en mantelyta.

Bestäm cylinderns maximala volym.

3 p



Ledning:

$$\text{bottenyta} = B = \pi r^2$$

$$\text{omkretsen} = O = 2\pi r$$

$$\text{mantelytan} = M = 1 - \text{bottenytan} = 1 - 2\pi r^2$$

$$\text{höjden} = h = \frac{\text{mantelytan}}{\text{omkretsen}} = \frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r}$$

$$\text{volym} = V(r) = Bh = \pi r^2 \left( \frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r} \right) = \frac{r}{2} - \pi r^3$$

$$\begin{cases} V'(r) = \frac{1}{2} - 3\pi r^2 \\ V'(r) = 0 \end{cases} \sim r = \pm \frac{1}{\sqrt{6\pi}}$$

Teckenstudium eller andraderivata ger maximal volym för

$$\begin{cases} V(r) = Bh = \pi r^2 \left( \frac{1 - 2\pi r^2}{2\pi r} \right) \\ r = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \end{cases} \sim V = \pi \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \right)^2 \cdot \frac{1 - 2\pi \left( \frac{1}{\sqrt{6\pi}} \right)^2}{2\pi \frac{1}{\sqrt{6\pi}}}$$

$$= \pi \cdot \frac{1}{6\pi} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{2\pi\sqrt{6\pi}}{6\pi}} = \frac{1}{3\sqrt{6\pi}} \approx 0,077 \text{ m}^3$$