Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna
- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera nu med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2015

Examination:	TEN 1, TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydligt angivna svar			
Hjälpmedel:	Skrivdon, linjal, passare, gradskiva, kurvmall			
Skrivtid:	2016-01-12, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Bestäm samtliga primitiva funktioner

a) $\int \ln 5x \, dx$

Lösningstips: Partiell integration ger $\int 1 \cdot \ln 5x \, dx = \cdots = x \ln 5x - x + C$

b) $\int \frac{3+4x}{1+x^2} dx$

Lösningstips: $3 \int \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int \frac{2x}{1+x^2} dx = 3 \arctan x + 2 \ln(1 + x^2) + C$

c) $\int \sin^3 x \cos x \, dx$

Lösningstips: $\int \sin^3 x \cos x \, dx = \left| \begin{matrix} \text{Kedjeregeln baklänges} \\ \text{eller variabelskifte} \end{matrix} \right| = \frac{\sin^4 x}{4} + C$

(3 p)

2. Bestäm samtliga lokala maximi- och minimipunkter hos funktionen

$$f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - x + 2 \quad \text{för } x \in \,]-4,\ 8]$$

Lösningstips: Punkter som kan ger lokala extrempunkter är (i) eventuella ändpukter (i detta fall endast $x = 8$), (ii) eventuella stationära punkter (notera att $x = 8$ är en ändpunkt och en funktion är aldrig deriverbar i en ändpunkt) samt (iii) eventuella singulära punkter (i detta fall $x = 0$). Teckenstudium av derivatan ger lokalt minimum i $x = 0$ och lokalt maximum i ändpunkten $x = 8$

(3 p)

3. Härled derivatan till $f(x) = e^x + x^3$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Härledning enligt derivatans definition ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} + (x+h)^3 - e^x - x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^{x+h} - e^x}{h} + \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{e^x(e^h - 1)}{h} + \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(e^x \cdot \underbrace{\frac{(e^h - 1)}{h}}_{sgv} + 3x^2 + 3xh + h^2\right) = e^x + 3x^2$$

(3 p)

4. Låt $f(x) = \begin{cases} kx + m & \text{för} \quad x \le 4 \\ \sqrt{x} & \text{för} \quad x > 4 \end{cases}$

Bestäm k och m så att funktionen blir kontinuerlig och deriverbar.

(3 p)

Lösningstips: Högergränsvärdet bestäms i skarven:

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x} = 2.$$

Därmed vet man att punkten $(4, 2)$ skall ingå som ändpunkt hos $f(x) = kx + m$ så att $f(x)$ blir kontinuerlig. Tack vare att punkten $(4, 2)$ numera ingår kan högerderivatan i punkten bestämmas med hjälp av derivatans definition enligt exempelvis:

$$f'_{höger}(4) = \lim_{x\to 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 4^+} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 4^+} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4^+} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

Därmed vet man dessutom att $k = \frac{1}{4}$ är nödvändigt för $f(x) = kx + m$ så att vänster- och högerderivatan blir lika då $x = 2$. Annars skulle punkten $(2, 10)$ bli en singulär punkt (utifrån derivatan). Insättning av punkten och k-värdet i ”räta linjens ekvation” $y = kx + m$ ger sedan att $m = 1$ så att:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} + 1 & \text{för} \quad x \le 4 \\ \sqrt{x} & \text{för} \quad x > 4 \end{cases}$$

5. Låt $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1}$

a) Bestäm eventuella asymptoter till $f(x)$

Lösningstips: Lodrät asymptot saknas eftersom att $x^2 + 1 \neq 0$ och sned asymptot finner man exempelvis med hjälp av polynomdivision som ger

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2+1} = \cdots = x + \frac{-x+2}{x^2+1} = x + \frac{-1+\frac{2}{x}}{x+\frac{1}{x}}$$

Att just $y = x$ är en asymtot inses exempelvis då differensen

$$f(x) - x = \frac{x^3+2}{x^2+1} - x = x + \frac{-x+2}{x^2+1} - x = \frac{-x+2}{x^2+1} = \frac{-1+\frac{2}{x}}{x+\frac{1}{x}} \to 0 \text{ då } x \to \pm\infty$$

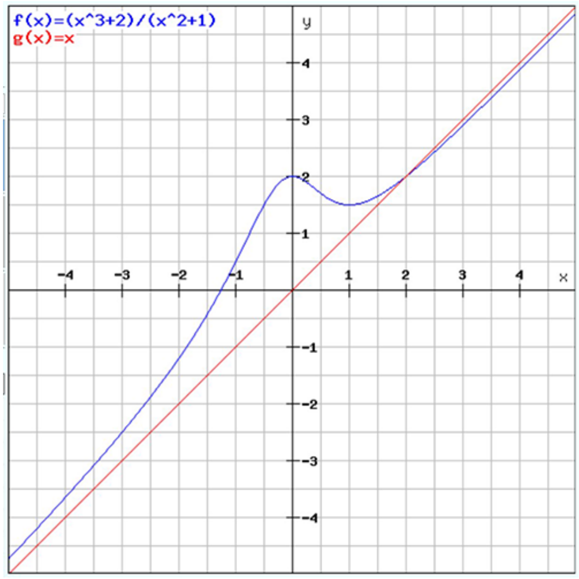
b) Bestäm eventuella stationära punkter för $f(x)$

Lösningstips: Derivering enligt kvotregeln ger

$$f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2 - 4x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x - 4)}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x-1)\overbrace{(x^2+x+4)}^{\neq 0}}{(x^2+1)^2}$$

Teckenstudium av derivatan ger lokalt maximum i $x = 0$ och lokalt minimum i $x = 1$.

c) Skissa kurvan till $f(x)$



(3 p)

6.

a) Bestäm y'' för den sammansatta funktionen $y = f(g(x))$

Lösningstips: Förstaderivatan blir enligt kedjeregeln $y' = f'(g(x))g'(x)$ som deriveras med hjälp av produktregeln och man får andraderivatan

$$y'' = \left(f''(g(x))g'(x)\right)g'(x) + f'(g(x))g''(x)$$
$$= f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

b) Ge exempel på en funktion $y = f(x)$ som uppfyller kravet $f''(0) = 0$ utan att funktionen har en inflexionspunkt i $x = 0$ och motivera varför.

Lösningstips: Andraderivaten i $x = 0$ skall vara lika med noll utan att andraderivatan skiftar tecken runt $x = 0$ (vilket den gör i en inflexionspunkt). Funktionen $f(x) = x^4$ uppfyller kravet $f''(x) = 0$ i punkten $x = 0$ samtidigt som $f''(x)$ är positiv (har samma tecken) på båda sidorna av $x = 0$

c) Varför måste en funktion vara deriverbar för att *Medelvärdessatsen för derivator* ska gälla? Visa gärna med en förklarande skiss.

Lösningstips: Genom att välja en funktion såsom $y = |x|$ eller $y = x^{\frac{2}{3}}$ vilka båda innehåller en *singulär punkt* (utifrån derivatan) i $x = 0$ så kan man med en skiss visa att det ofta helt saknas *inre punkter med samma derivata som "lutningen mellan ändpunkterna"* (vilka satsen annars anger att det finns) så länge den singulära punkten ingår i det valda intervallet.

(3 p)

7. Visa med stöd av valfri sats att $f(x) = \arcsin x - 2\arctan x$ har minst en stationär punkt.

(3 p)

Lösningstips: Funktionen har $D_f = [-1, 1]$ och för ändpunkter gäller $f(-1) = f(1) = 0$. Alltså är "lutningen mellan ändpunkterna = 0". Därmed måste det enligt Rolles sats (sats 4.11) eller *Medelvärdessatsen för derivator* (sats 4.10) finnas *minst en inre punkt* inom detta slutna intervall sådan att $f'(x) = 0$ och därmed finns minst en stationär punkt.

Fotnot: De stationära punkterna behöver alltså inte beräknas i denna uppgift – det räcker med att visa att minst en sådan finns, enligt ovan. Om man ändå föredrar att beräkna dem på klassiskt sätt genom $f(x) = 0$ (sats 4.9) får man punkterna

$$x = \pm\sqrt[4]{3}\sqrt{2-\sqrt{3}} = \pm\sqrt{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \pm\sqrt{2\sqrt{3}-3} \approx \pm 0.68$$