

Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsninganteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsninganteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Envariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2016

Examination: TEN 1, TNIU22

Max: 21 p betyg 5: ≥ 16 p betyg 4: ≥ 12 p betyg 3: ≥ 8 p

Bonus: 0-2 p grundad på KTR1

Lösningar: Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.

Hjälpmedel: Skrivdon, passare, kurvmall och linjal

Skrivtid: 2017-01-10, kl. 08:00–13:00

1.

$$\text{Låt } f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$$

a) Beräkna eventuella stationära punkter och avgör deras karaktär.

Lösningstips:

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2} \text{ ger } f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \text{ då } x = 2$$

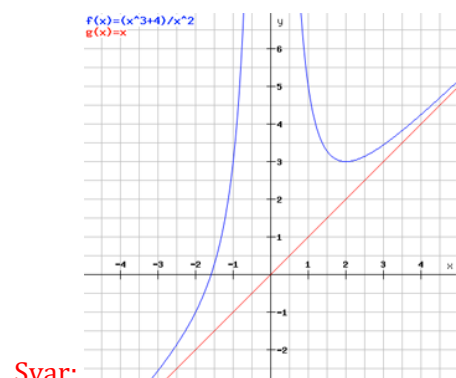
som med teckenstudium inses vara lokalt minimum.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips: Gränsvärden då $x \rightarrow 0$ ger lodrät asymptot $x = 0$.

Sned asymptot $y = x$ fås på samma sätt som i exempel 3.36 i läroboken eller genom bl.a. polynomdivision som i exempel 3.37.

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.



Svar:

(3 p)

2.

$$f(x) = x + x^{\frac{1}{3}}$$

a) Visa att $f(x)$ har invers.

Lösningstips: Eftersom att $f'(x) = 1 + \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} > 0$ för alla x följer enligt sats 4.8 att funktionen är strängt växande och därmed är funktionen omvändbar och har invers.

b) Beräkna $(f^{-1})'(10)$ för $f(x) = x + x^{\frac{1}{3}}$.

Lösningstips: Sats 4.6 eller resonemang utifrån symmetri med spegelpunkter ger $(f^{-1})'(10) = \frac{12}{13}$
(3 p)

3. Medelvärdessatsen för derivator

a) Vad säger satsen?

Lösningstips: Se sats 4.10 och föreläsning 9

b) Förklara med en skiss varför satsen inte gäller ifall funktionen inte är deriverbar i en eller flera inre punkter av aktuellt intervall.

Lösningstips: Se föreläsning 9
(3 p)

4.

a) Härled derivatan $f'(x)$ till $f(x) = x^2 + \ln 2x$ med hjälp av derivatans definition.

Lösningstips: Derivatan kan härledas termvis (termen $\ln x$ med hjälp av standardgränsvärde) och man får $f'(x) = 2x + \frac{1}{x}$

b) Härled derivatan $f'(x)$ till $f(x) = \arcsin x$ på valfritt sätt.

Lösningstips: $y = \arcsin x$ ger $\sin y = x$ för $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Ledvis derivering (glöm ej inre derivatan)
och "trigettan" ger sedan $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
(3 p)

5. Bestäm följande primitiva funktioner:

a)

$$\int \frac{4 + 8x}{1 + x^2} dx$$

Lösningstips: Sats 5.2 och Sats 5.3 ger $4 \arctan x + 4 \ln(1 + x^2) + C$

b)

$$\int \cos x \sin x \, dx$$

Lösningstips: Partiell integration eller kedjeregeln baklänges eller variabelbyte eller ger $-\frac{\cos^2 x}{2} + C$ eller $\frac{\sin^2 x}{2} + D$ medan "dubbla vinkeln" ger $-\frac{\cos 2x}{4} + E$.
De tre alternativen har konstanter förskjutna.

c)

$$\int e^{-x^2} 6x \, dx$$

Lösningstips: Kedjeregeln baklänges eller variabelbyte ger $-3e^{-x^2} + C$

(3 p)

6.

a) Ange vad som krävs för att en funktion $f(x)$ skall vara kontinuerlig i en punkt $x = a$.

Lösningstips: Se Definition 3.5 som säger att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ skall stämma överens med funktionsvärdet $f(a)$ i den aktuella punkten, eller att $x = a$ är en isolerad punkt.

b) Bestäm A så att $f(x)$ blir kontinuerlig för

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{5x} - 1 - \ln(1+2x)}{x} & \text{då } x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \infty[\\ A & \text{då } x = 0 \end{cases}$$

Lösningstips: Gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ bestäms med hjälp av standardgränsvärden och man får $A = 3$.

(3 p)

7. En plåtburk rymmer ca 0,4 liter dryck och har den exakta volymen $V = 128\pi \text{ cm}^3$. Beräkna minimal åtgång plåt till två basytor och en mantelyta hos burken med formen av en rak cirkulär cylinder.

Lösningstips:

$$\begin{cases} \text{Volymen} = V = 128\pi \text{ (cm}^3\text{)} \\ \text{Basytan} = B = \pi r^2 \\ V = Bh \end{cases} \Rightarrow h = \frac{128}{r^2}$$

$$\text{Omkretsen} = o = 2\pi r$$

$$\text{Mantelytan} = M = oh = 2\pi r \frac{128}{r^2} = \frac{256\pi}{r}$$

$$\text{Total area} = A = 2B + M = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2} \\ \frac{dA}{dr} = 0 \end{cases} \Rightarrow r = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ (cm)}$$

Teckenstudie av $\frac{dA}{dr}$ visar att $r = 4$ ger minimal area $A = 2 \cdot 16\pi + 64\pi = 96\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

(3 p)