Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2017

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2017-01-12, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1. Låt

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x}$$

a) Bestäm samtliga asymptoter.

Lösningstips:

Höger- och vänstergränsvärde i origo ger lodrät asymptot $x = 0$

Polynomdivision ger $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x}$ som närmar sig den sneda asymptoten $y = x - 1$ då $x \to \pm\infty$

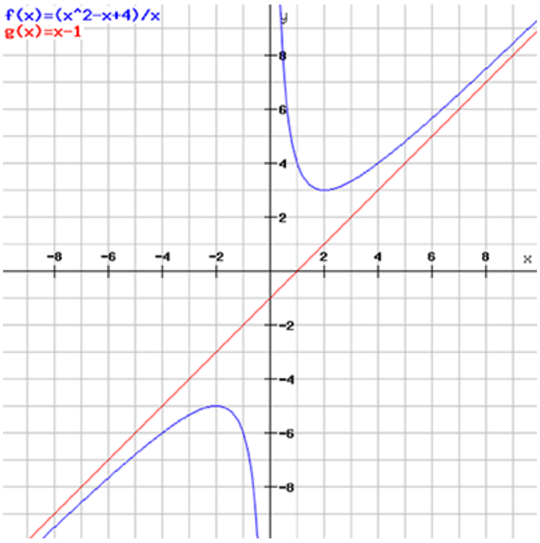
b) Beräkna samtliga stationära punkter.

Lösningstips:

$f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ ger stationära punkter i $x = \pm 2$

c) Skissa grafen med tillhörande asymptoter.

Svar:



(3 p)

2. Lös följande obestämda integraler

a)

$$\int 8xe^{2x}dx$$

Lösningstips: Partiell integration ger svaret $(4x - 2)e^{2x} + C$

b)

$$\int \tan x \, dx$$

Lösningstips: Derivatan av nämnaren i täljaren ger $\int \tan x \, dx$

$$-\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

c)

$$\int (\cos(\tan x))(1 + \tan^2 x) \, dx$$

Lösningstips: Substitution $y = \tan x$ eller kedjeregeln baklänges ger svaret $\sin(\tan x) + C$

(3 p)

3.

a) Bestäm $f'(x)$med hjälp av derivatans definition om

$$f(x) = e^{2x} + \ln 3x$$

Lösningstips: Derivatans definition och två standardgränsvärden ger

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^{2(x+h)} + \ln 3(x+h)\right) - \left(e^{2x} + \ln 3x\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{2x+2h} - e^{2x}}{h} + \frac{\ln(3x+3h) - \ln 3x}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{e^{2x}\left(e^{2h} - 1\right)}{h} + \frac{\ln \frac{3x+3h}{3x}}{h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(2e^{2x} \underbrace{\frac{\left(e^{2h} - 1\right)}{2h}}_{sgv} + \underbrace{\frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}}_{sgv} \frac{1}{x}\right) = 2e^{2x} + \frac{1}{x}$$

a) Bestäm $f'(x)$ om

$$f(x) = \arcsin x$$

med hjälp av den kända derivatan till funktionens invers

Lösningstips:

$$y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin y = x \quad \text{och} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

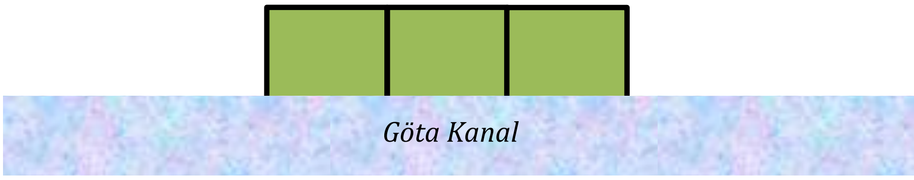
Derivering enligt kedjeregeln ger

$$\cos y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\underbrace{\cos y}_{>0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(3 p)

4. En fårhage med tre lika stora ytor, utmed Göta kanal, skall ha taggtråd till en långsida och fyra kortsidor enligt:



Bestäm hagens maximala area och taggtrådens totala längd är 240 m

Lösningstips:

$$A(x) = x(240 - 4x) = 240x - 4x^2 \quad , \quad 0 \leq x \leq 60$$

$$A'(x) = 240 - 8x = 0 \quad \text{för} \quad x = 30$$

Den stationära punkten och ändpunkterna kontrolleras genom teckenstudium och globalt maximum fås för $x = 30$.

$$A(30) = 30 \cdot 120 = 3600$$

Svar: 3600 m²

(3 p)

5. Funktioner och begrepp

a) Ge exempel på en funktion som har $f''(0) = 0$ utan att $x = 0$ är en inflexionspunkt, motivera ditt svar.

Svar: Till exempel $f(x) = x^4$ med $f''(x) = 12x^2$ har $f''(x) = 0$ för $x = 0$ utan att $f''(x)$ skiftar tecken i $x = 0$

b) Ge exempel på en funktion som har olika vänster- och högerderivata i origo, motivera ditt svar.

Svar: Till exempel $f(x) = |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases}$ har högerderivatan 1 och vänsterderivatan -1 för $x = 0$

c) Ge exempel på en funktion saknar både vänster- och högerderivata i origo, trots att funktionen är definierad i origo – motivera ditt svar.

Svar: Till exempel $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$ men tillhörande

$f'(x) = \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ är ej definierad för $x = 0$

(3 p)

6. Visa att funktionen har minst en stationär punkt

$$f(x) = 10^x + \frac{x-1}{20} + \frac{10}{\pi}\arccos x \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

(3 p)

Lösningstips:

$f(-1) = 10$ och $f(1) = 10$

$f(x) = 10^x + \frac{x-1}{20} + \frac{10}{\pi}\arccos x$ är deriverbar på hela intervallet.

Därmed måste det enligt Rolles sats (eller Medelvärdessatsen för derivator)

finnas minst ett $x = \xi$ inom intervallet $]-1,1[$ sådant att

$f'(\xi) = 0$

och därmed har funktionen minst en stationär punkt.

7. Para ihop funktion med korrekt påstående genom att studera lämpliga gränsvärden:

a) $$f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x^2} & , \ x \ne 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

b) $$f(x) = \begin{cases} x\arctan\frac{1}{x} & , \ x \ne 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

c) $$f(x) = \begin{cases} \arctan\frac{1}{x} & , \ x \ne 0 \\ \frac{\pi}{2} & , \ x = 0 \end{cases}$$

d) $$f(x) = \begin{cases} x^2\arctan\frac{1}{x} & , \ x \ne 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases}$$

i) Deriverbar i $x = 0$ och därmed även kontinuerlig i $x = 0$

ii) Högerkontinuerlig men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

iii) Både höger- och vänsterkontinuerlig i $x = 0$ men inte deriverbar i $x = 0$

iv) Varken höger- eller vänsterkontinuerlig i $x = 0$, därmed inte deriverbar i $x = 0$

(3 p)

Lösningstips:

Funktion a)

$$\lim_{x\to 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Detta visar att funktionen inte är kontinuerlig i $x = 0$ och därmed inte heller är deriverbar i $x = 0$ då deriverbarhet är är ett strängare krav än kontinuitet.

Påstående iv) stämmer.

Funktion b)

$$\lim_{x\to 0} x \underbrace{\arctan \frac{1}{x}}_{\text{begränsad}} = 0$$

Detta visar att funktionen är kontinuerlig i $x = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \arctan\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \arctan \frac{1}{h} = \text{olika höger- och vänsterderivata } \pm\frac{\pi}{2}$$

Detta visar att funktionen inte är deriverbar i $x = 0$.

Påstående iii) stämmer.

Funktion c)

$$\lim_{h\to 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$$

Detta visar att funktionen är högerkontinuerlig i $x = 0$ men inte vänsterkontinuerlig i $x = 0$ och därmed är funktionen inte heller deriverbar i $x = 0$ då deriverbarhet är ett strängare krav än kontinuitet.

Påstående ii) stämmer.

Funktion d)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \arctan\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \underbrace{\arctan \frac{1}{h}}_{\text{begränsad}} = 0$$

Detta visar att funktionen är deriverbar i $x = 0$ och därmed är funktionen också kontinuerlig i $x = 0$ då kontinuitet automatiskt följer om funktionen är deriverbar.

Påstående i) stämmer.