Studietips inför kommande tentamen TEN1 inom kursen TNIU22

Lämplig ordning på sammanfattande studier inom denna kurs:

- Inled med att grundligt studera föreläsningsanteckningarna
- Därefter läs tillhörande sidor i läroboken (se arbetsschemat) – särskilt definitioner, satser och betydelsen av alla fetstilta begrepp
- Lös nu samtliga teorifrågor (från hemsidan) med svar som hämtas ur läroboken och föreläsningsanteckningarna

Ovanstående tre punkter kan tas i valfri ordning då de ändå hänger ihop.

- Nu är du redo för att studera tidigare kontrollskrivningar och tentamina såsom denna – alltså efter att ovanstående har bearbetats
- Komplettera till sist med uppgifter från arbetsschemat

Peter Holgersson, ITN
Linköpings Universitet
Tel. 0705-19 99 92
petho@itn.liu.se

Tentamen inom Enavariabelanalys 1

Ordinarie tentamen för kursen HT2018

Examination:	Modul TEN1 inom utbildning TNIU22			
Max:	21 p	betyg 5: ≥ 16 p	betyg 4: ≥ 12 p	betyg 3: ≥ 8 p
Bonus:	0-2 p grundad på KTR1			
Lösningar:	Fullständiga med tydliga förklaringar/beräkningar och tydligt angivna svar. Notera att uppgifterna ej är sorterade i svårighetsgrad.			
Hjälpmedel:	Skrivdon, passare, gradskiva, kurvmall och linjal			
Skrivtid:	2019-01-16, kl. 08:00–13:00			
Jour:	Peter Holgersson, 0705-19 99 92			

---

1) Lös de obestämda integralerna

a)

$$\int \frac{8x+3}{1+x^2}\,dx$$

Svar: $4\ln(1+x^2) + 3\arctan x + C$

b)

$$\int 4x \ln x \, dx$$

Svar: $2x^2 \ln x - x^2 + C$

c)

$$\int e^{\tan x} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

Svar: $e^{\tan x} + C$

3 p

2) Låt

$$f(x) = \frac{4+x^3}{x^2}$$

a) Beräkna eventuella stationära punkter och avgör deras karaktär.

Svar:

Lokalt minimum i $x = 2$.

b) Bestäm samtliga asymptoter.

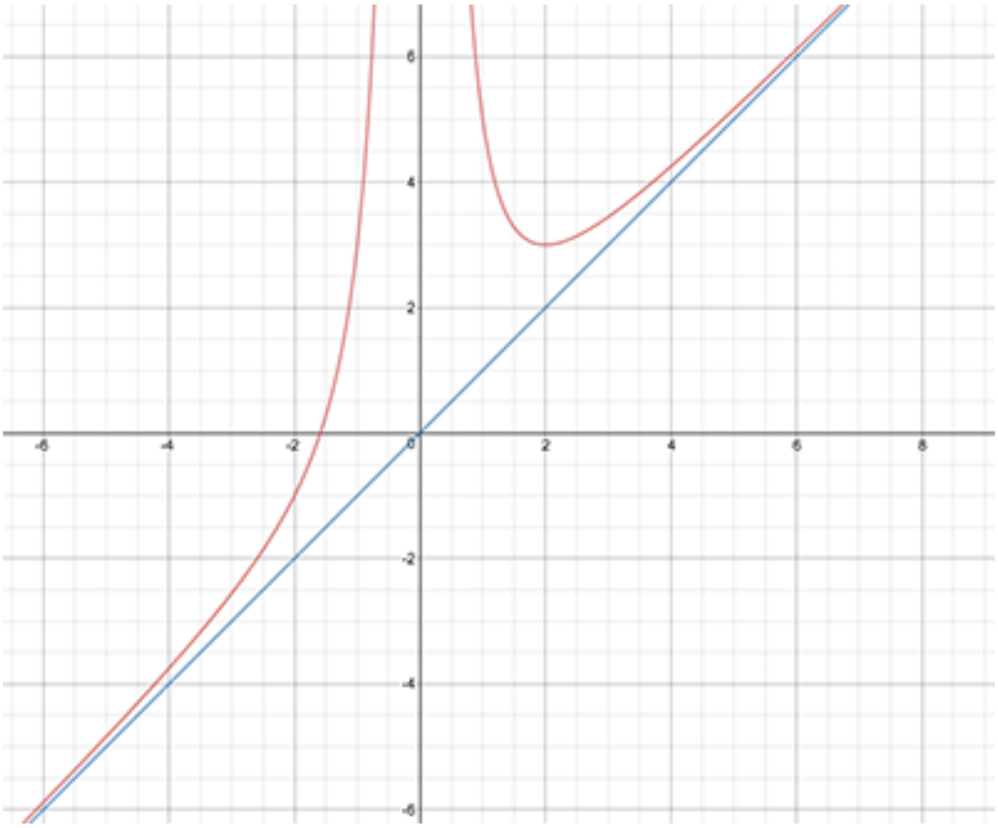
Lösningstips:

Lodräta asymptot tas fram med hjälp av gränsvärde från båda håller mot $x = 0$.

Sned asymptot $y = x$ fås exempelvis med polynomdivision och gränsvärden då $x \to \pm\infty$

c) Skissa kurvan med tillhörande asymptoter.

Svar:



3 p

3) Låt

$$f(x) = 2x + x^{\frac{1}{3}}$$

a) Visa att $f(x)$ är strängt växande.

Lösningstips:

Genom att visa att förstaderivatan är strängt större än 0 för alla x-värden följer sedan enligt sats att funktionen har invers.

b) Beräkna $(f^{-1})'(18)$.

Lösningstips:

Att ta fram inversen lyckas man inte med, så man tvingas till ett ”spegelresonemang” utifrån symmetrilinjen $y = x$.

Det aktuella värdet $x = 18$ hos inversen ger spegelpunkt med $y = 18$ hos $f(x)$ som endast hör samman med $x = 8$ (ty funktionen är strängt växande).

$$f'(8) = 2 + \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{8^2}} = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

Enligt sats gäller nu genom symmetri att $(f^{-1})^{-1}(18) = \frac{12}{25}$

3 p

4) Låt

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & då\ x < 0 \\ \arctan x & då\ x \geq 0 \end{cases}$$

Besvara följande frågor och motivera svaren med resonemang eller beräkningar:

a) Är funktionen kontinuerlig?

Lösningstips:

Eftersom att ”delfunktionerna” är elementära funktioner så råder kontinuitet för alla aktuella x -värden utom gränsen $x = 0$; en elementär funktion är alltid kontinuerliga på hela sin definitionsmängd. Gränsen $x = 0$ studeras med vänster- och högergränsvärde vilka är lika och därmed råder kontinuitet i alla x -värden hos funktionen.

b) Är funktionen deriverbar?

Lösningstips:

Eftersom att ”delfunktionerna” är derviverbara funktioner så råder derviverbarhet för alla aktuella x -värden utom gränsen $x = 0$. Gränsen $x = 0$ studeras med vänster- och högerderivata vilka är lika och därmed råder deriverbarhet för alla x -värden hos funktionen och funktionen saknar därmed singulär punkt; skarven ”är ingen hörnpunkt”.

c) Är funktionen begränsad neråt?

Lösningstips:

Båda delfunktionerna är sådana funktioner som är begränsade neråt och det lägsta funktionsvärdet fås i den stationära punkten som ges av den vänstra delfunktionen

$f'(x) = 2x + 1 = 0$ ger $x = -\frac{1}{2}$ med lägsta y-värdet $y = -\frac{1}{4}$

Notera att den högra delfunktionen saknar stationära punkter.

3 p

5) En öppen plåtburk har formen av en rak cirkulär cylinder – utan lock – och har den exakta volymen $V = 125\pi \text{ cm}^3$ ($\approx$ 0,4 liter). Beräkna den minsta arean plåt (mantelyta och basyta) som räcker till att skapa denna burk.

3 p

Lösningstips:

$$\begin{cases} Volymen = V = 125\pi \ (\text{cm}^3) \\ Basytan = B = \pi r^2 \\ V = Bh \end{cases} \Rightarrow \quad h = \frac{125}{r^2}$$

$$Omkretsen = o = 2\pi r$$

$$Mantelytan = M = oh = 2\pi r \frac{125}{r^2} = \frac{250\pi}{r}$$

$$Total\ area = A = B + M = \pi r^2 + \frac{250\pi}{r}$$

$$\begin{cases} \frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{250\pi}{r^2} \\ \frac{dA}{dr} = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{125} = 5 \ (\text{cm})$$

Teckenstudie av $\frac{dA}{dr}$ visar att $r = 5$ ger minimal area $A = \pi 5^2 + \frac{250\pi}{5} = 75\pi \approx 236 \ (\text{cm}^2)$

6) Låt

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\arcsin x - \cos(\pi x)$$

Visa med hjälp av lämplig sats att funktionen har minst en inre punkt med $f'(x) = 4$.

3 p

Lösningstips:

Funktionen deriverbar och har den slutna definitionsmängden $x \in [-1, 1]$.

Ändpunkterna har funktionsvärdena

$$f(1) = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} - (-1) = 5 \text{ och } f(-1) = \frac{8}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) - (-1) = -3$$

Medelvärdessatsen för derivata har alla villkor uppfyllda.

Därmed gäller för minst en inre punkt ξ att

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{8}{2} = 4$$

7) Låt

$$f(x) = \arcsin\frac{x}{2 - x^2}$$

Bestäm funktionens definitionsmängd och värdemängd.

3 p

Lösningstips:

Funktionen $\arcsin y$ kräver att $-1 \leq y \leq 1$ och detta gör att följande dubbel-olikhet måste uppfyllas:

$$-1 \leq \frac{x}{2 - x^2} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2}{2 - x^2} \leq \frac{x}{2 - x^2} \leq \frac{2 - x^2}{2 - x^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2}{2 - x^2} \leq \frac{x}{2 - x^2} \leq \frac{2 - x^2}{2 - x^2}$$

Den högra olikheten faktoriseras och studeras:

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{\left(\sqrt{2} + x\right)\left(\sqrt{2} - x\right)} \leq 0$$

Teckenstudium ger för den högra olikheten ger:

$$D_{f1} = \left]-\infty, -2\right] \cup \left]-\sqrt{2}, 1\right] \cup \left]\sqrt{2}, \infty\right[$$

Den vänstra olikheten faktoriseras och studeras:

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(\sqrt{2}+x)(\sqrt{2}-x)} \leq 0$$

Teckenstudium ger för den vänstra olikheten ger:

$$D_{f2} = \left]-\infty, -\sqrt{2}\right[\cup \left[-1, \sqrt{2}\right[\cup [2, \infty[$$

Snittet av dessa två mängder ger nu definitionsmängden

$$D_f =]-\infty, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, \infty[$$

Det mellersta sammanhängande intervallet av definitionsmängden $[-1, 1]$ har ändpunkter med funktionsvärdena $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$.

Enligt satsen om mellanliggande värden måste alla funktionsvärden inom intervallet $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ existera. Då inga ytterligare funtionsvärden kan existera för arcsin y gäller att

$$V_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$